ADGANGSKURSUS AALBORG UNIVERSITET

Formelsamling

Brush-up Flex

2016

Indholdsfortegnelse

1. Brøkregning

1. At forkorte: $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$

2. At forlænge: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$

3. Addition og subtraktion: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{d \cdot b}$ (Fællesnævner!)

4. Multiplikation: $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$

5. Multiplikation: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

6. Division: $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$

7. Division: $\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$

8. Division: $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

2. Parenteser

1. At ophæve plus- og minusparenteser: $(a+b) = a+b$ og $-(a+b) = -a-b$
2. At gange ind i en parentes: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
3. At gange to parenteser sammen: $(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$
4. At sætte udenfor parentes: $k \cdot a + k \cdot b = k \cdot (a+b)$

3. Kvadratsætningerne:

1. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$
2. $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b$
3. $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

4. Potensregneregler

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

3. $a^0 = 1$

4. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

5. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

6. $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

7. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

8. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

9. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

10. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

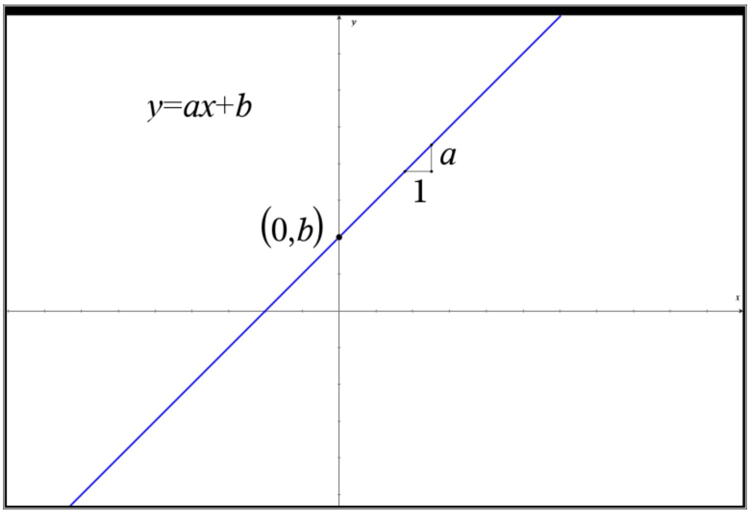
5. Andengradsligninger

For andengradsligningen: $ax^2 + bx + c = 0$, med $d = b^2 - 4ac$ gælder, at

- Hvis $d < 0$ har ligningen ingen løsning
- Hvis $d = 0$ har ligningen én løsning: $x = -\frac{b}{2a}$
- Hvis $d > 0$ har ligningen to løsninger: $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$

6. Den rette linje

1. Enhver ikke-lodret linje kan skrives på formen: $y = ax + b$, hvor a er linjens hældningskoefficient og $(0, b)$ er linjens skæringspunkt med y-aksen.



2. Ligning for en ret linje med hældning a, som går igennem punktet (x_0, y_0): $y = a \cdot (x - x_0) + y_0$

3. Hældning for en ret linje gennem punkterne: (x_1, y_1) og (x_2, y_2):
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

4. Om linjerne $l: y = ax + b$ og $m: y = cx + d$ gælder, at:
$l \parallel m \iff a = c$ (Parallelle)

5. Om linjerne $l: y = ax + b$ og $m: y = cx + d$ gælder, at:
$l \perp m \iff a \cdot c = -1$ (Ortogonale)

7. Andengradspolynomiet

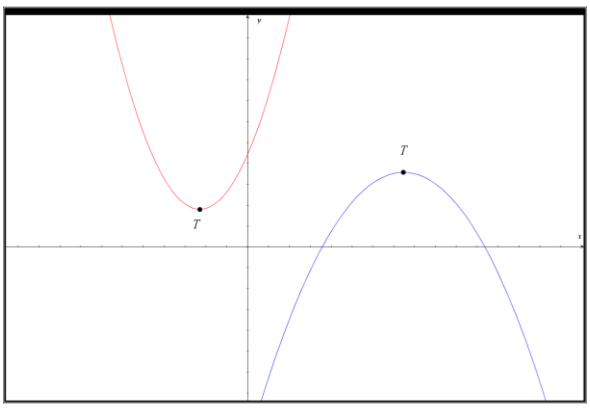
1. Faktorisering: Om et andengradspolynomium: $f(x) = ax^2 + bx + c$ gælder, at

    - Hvis polynomiet har to rødder r_1 og r_2 kan det faktoriseres på følgende måde:
      $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$

    - Hvis polynomiet kun har én rod r kan det faktoriseres på følgende måde:
      $f(x) = a(x - r)^2$

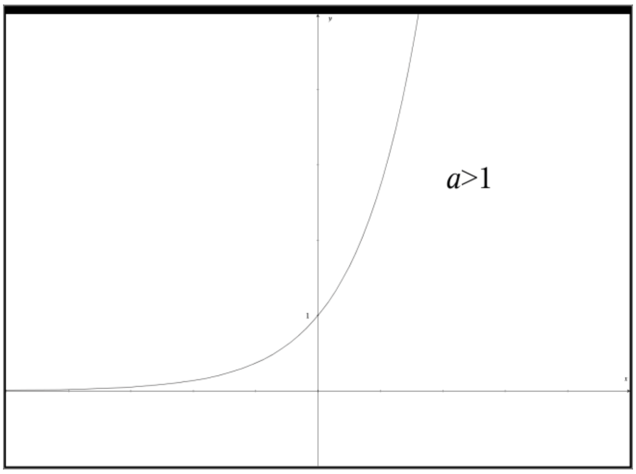
    - Hvis polynomiet inden rødder har, kan det ikke faktoriseres

2. Toppunkt: Grafen for et andengradspolynomium: $f(x) = ax^2 + bx + c$ kaldes en parabel. Parablens toppunkt T kan beregnes ved følgende formel:
   $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right)$, hvor $d = b^2 - 4ac$

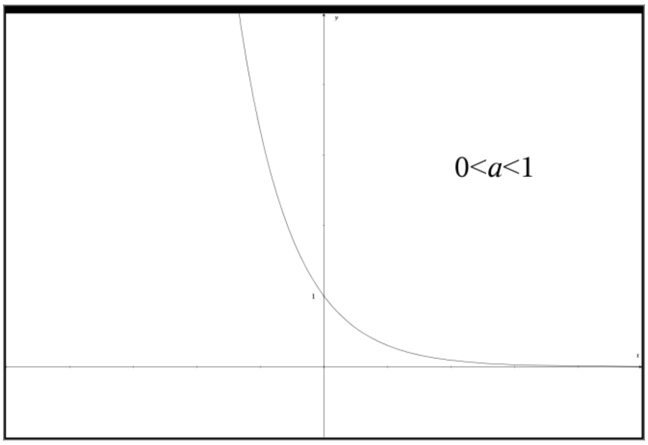


8. Eksponentialfunktion

1. Funktioner på formen: $f(x) = a^x$, hvor $a > 0$ og $a \neq 1$, kaldes eksponentialfunktioner.



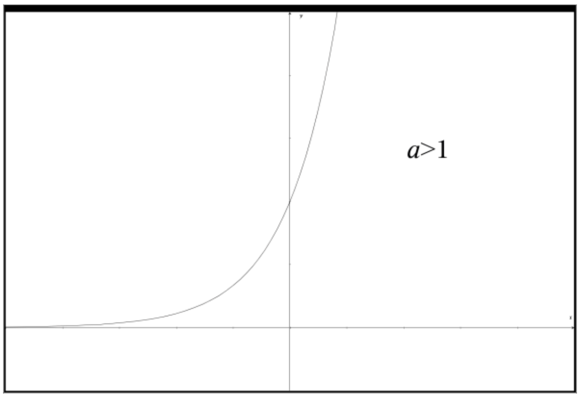
Funktionen er voksende



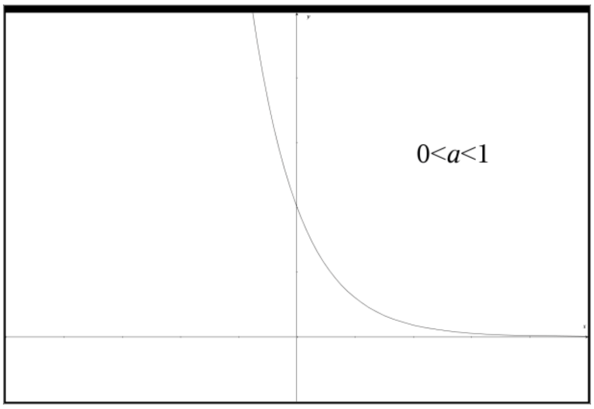
Funktionen er aftagende

9. Eksponentielle udviklinger

1. Funktioner på formen: $f(x) = b \cdot a^x$, hvor $a, b > 0$ og $a \neq 1$, kaldes eksponentielle udviklinger.



Funktionen er voksende



Funktionen er aftagende

2. Fordoblingskonstanten: $T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\log(2)}{\log(a)}$

3. Halveringskonstanten: $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(a)}$

10. Logaritmer

1. Om den naturlige logaritme: $f(x) = \ln(x)$, gælder:

- $Dm(f) =]0, \infty[$ og $Vm(f) = \mathbb{R}$
- $\ln(e^x) = x$ og $e^{\ln(x)} = x$
- $\ln(1) = 0$ og $\ln(e) = 1$

2. Om titalslogaritmen: $\mathrm{f(x)} = \log_{10}(x)$, gælder:

- $Dm(f) =]0, \infty[$ og $Vm(f) = \mathbb{R}$
- $\log(10^x) = x$ og $10^{\log(x)} = x$
- $\log(1) = 0$ og $\log(10) = 1$

3. Logaritmeregneregler (Gælder for ALLE logaritmer!)
   For $a, b > 0$ og $t \in \mathbb{R}$

- $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^t) = t \cdot \ln(a)$

- $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$
- $\log\left(\frac{a}{b}\right) = log - \log(b)$
- $\log(a^t) = t \cdot \log(a)$

11. Differentialregning

1.

$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a
ax^2+bx+c	$2ax+b$
$x^n, n \neq 1$	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

2. Regnereglerne for differentiation

- $(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
- $(f \circ g)'(x) = \left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$

3. Ligning for tangent til grafen for f i punktet $\left(x_0, f(x_0)\right)$:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

12. Integralregning

1.

$f(x)$	$F(x)$
k	$k \cdot x$
x	$\frac{1}{2}x^2$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert)$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$
e^x	e^x
$e^{k \cdot x}$	$\frac{1}{k}e^{k \cdot x}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert \cos(x) \rvert)$

2. Regneregler for integration

- Ubestemt integral:
  $\int f(x)\,dx = F(x) + k, k \in \mathbb{R}$, hvor $F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$.

- $\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$

- $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

- $\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$, hvor $t = g(x)$

- Bestemt integral:
  $$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

- $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

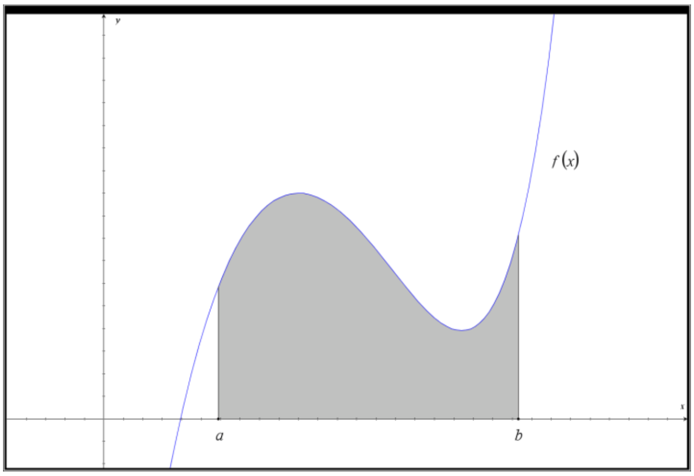
- $\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

- $\int_a^b f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt = [F(x)]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$,

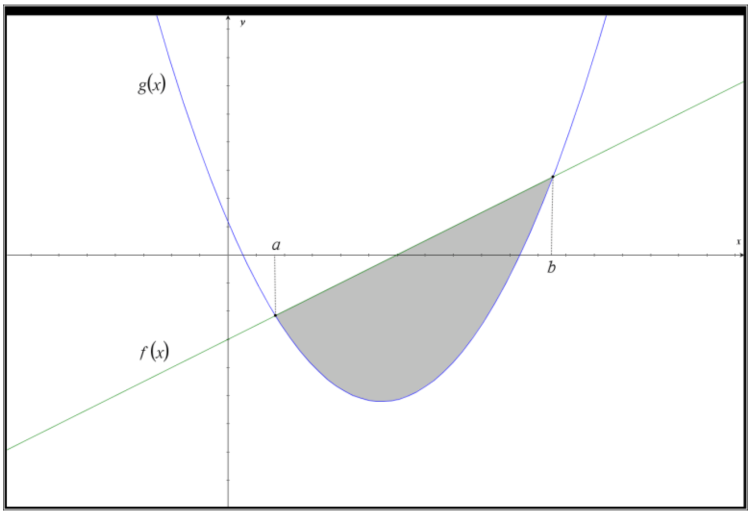
  hvor *F* er en stamfunktion til $f(x)$

13. Areal og rumfang

1. Arealet A af det skraverede område: $A = \int_a^b f(x)\,dx$



2. Arealet A af det skraverede område: $A = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$



3. Rumfang V_x af det omdrejningslegeme der fremkommer ved, at rotere området $M = \{(x, y) |\ a \leq x \leq b\ \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$, 360° omkring *x*-aksen:

$$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$

4. Rumfang V_y af det omdrejningslegeme der fremkommer ved, at rotere området $M = \{(x, y) |\ a \leq x \leq b\ \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$, 360° omkring *y*-aksen:

$$V_y = \left| 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\, dx \right|$$

14. Differentialligninger

1. Differentialligningen: $y' + g(x) \cdot y = h(x)$, har løsningen:
   $y = e^{-G(x)} \cdot \left(\int h(x) \cdot e^{G(x)}\, dx + C\right)$, hvor $G(x)$ er en stamfunktion til $g(x)$

2. Differentialligningen: $y' = h(x)$, har løsningen: $y = \int h(x)\, dx$

3. Differentialligningen: $y' = k \cdot y$, har løsningen: $y = c \cdot e^{k \cdot x}$

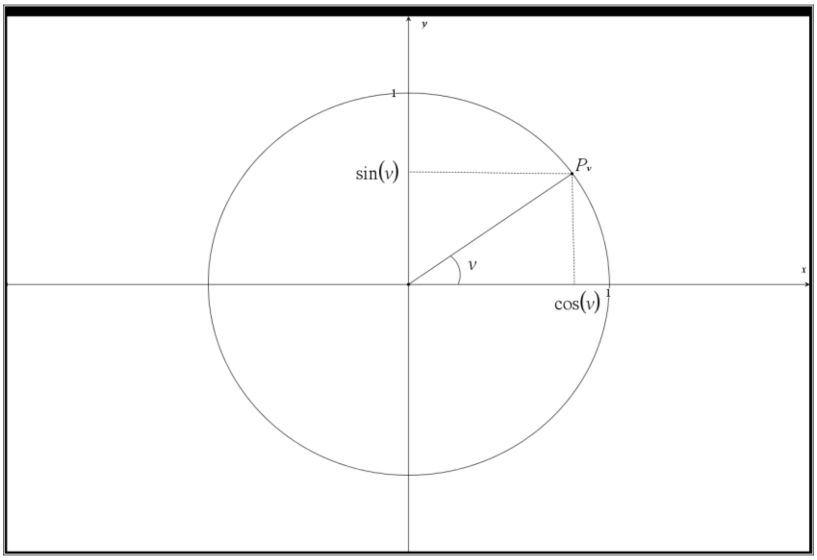
4. Differentialligningen: $y' = b - ay$, har løsningen: $y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$

5. Differentialligningen: $y' = y \cdot (b - ay)$, har løsningen: $y = \frac{\frac{b}{a}}{1 + c \cdot e^{-bx}}$

6. Differentialligningen: $y' = ay \cdot (M - y)$, har løsningen: $y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-aMx}}$

15. Trigonometri

1. Definition af sinus, cosinus og tangens.



- $\text{Cos}(v)$ er defineret som x-koordinaten til vinklens retningspunkt P_v
- $\text{Sin}(v)$ er defineret som y-koordinaten til vinklens retningspunkt P_v.
- $\text{Tan}(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}$

Grader	0°	30°	45°	60°	90°
Radianer	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

2. Grundrelationen: $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

3. Overgangsformler:

$\text{Cos}(x) = \text{Cos}(x + p \cdot 2\pi),\ p \in \mathbb{Z}$
$\text{Cos}(x) = \text{Cos}(-x)$
$\text{Cos}(\pi - x) = -\text{Cos}(x)$

$\text{Sin}(x) = \text{Sin}(x + p \cdot 2\pi),\ p \in \mathbb{Z}$
$-\text{Sin}(x) = \text{Sin}(-x)$
$\text{Sin}(\pi - x) = \text{Sin}(x)$

16. Harmonisk svingning

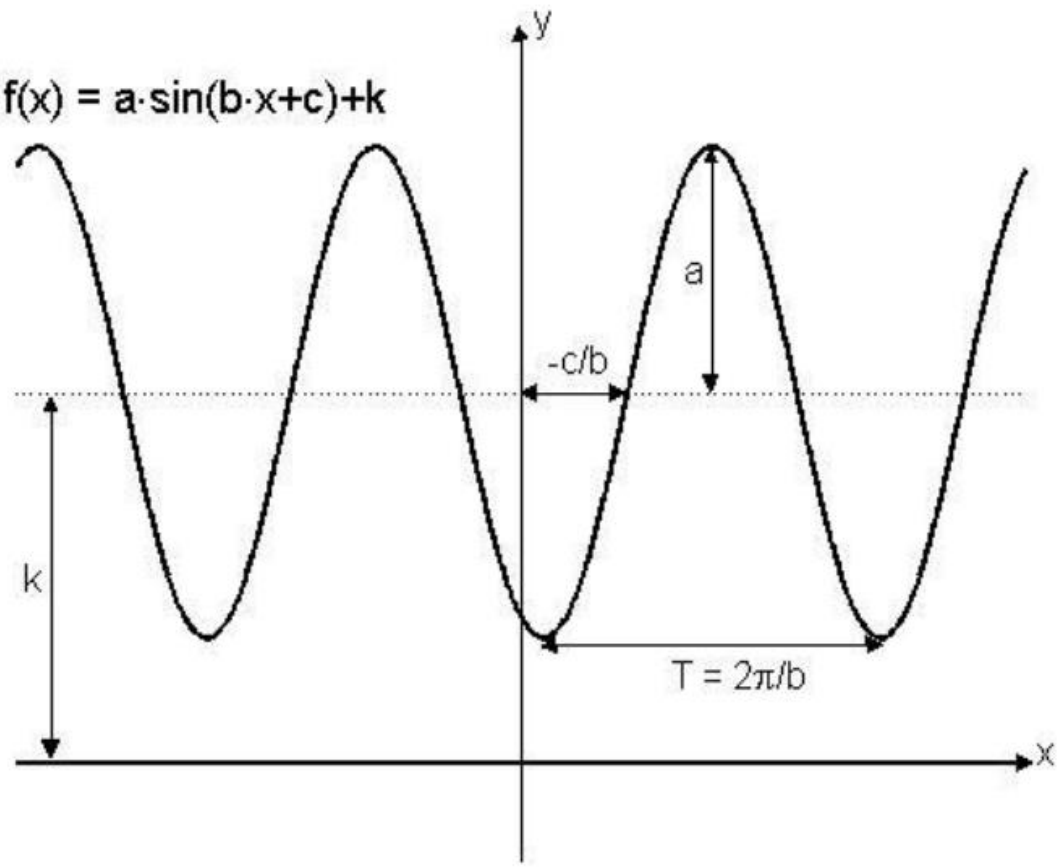
$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + k$

Periode: $T = \frac{2\pi}{b}$

Amplitude: $|a|$

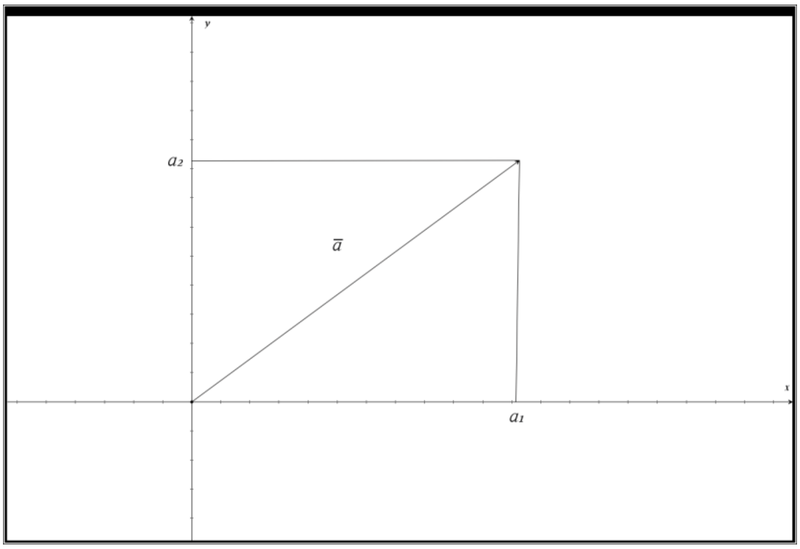
Lodret forskydning: k

Faseforskydning: $-\frac{c}{b}$



17. Vektorer i planen

1. Koordinaterne til vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

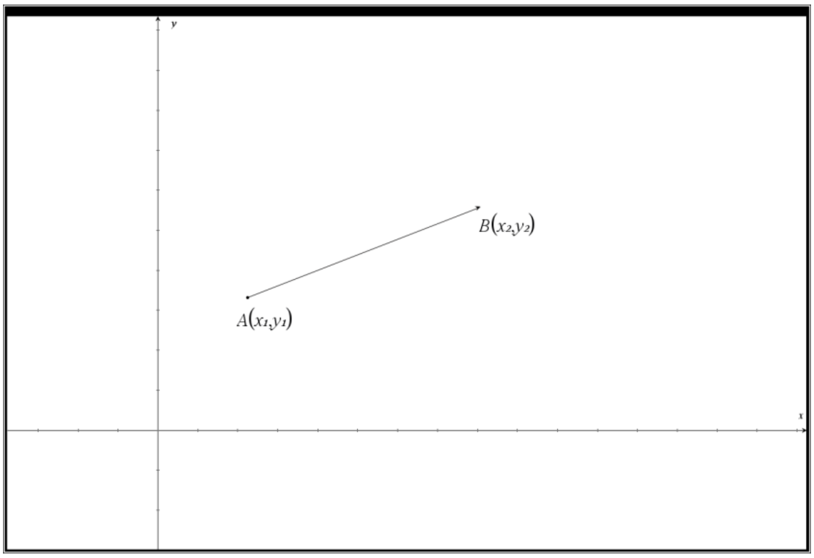


2. Længden af vektor $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

3. $k \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$

4. $\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \end{pmatrix}$

5. Koordinaterne til vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$



6. Afstanden mellem punkterne $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$: $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

7. Skalarprodukt/prikprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

8. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(v)$, hvor v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$

9. $\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

10. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

11. Ortogonale vektorer: $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

12. Tværvektor til vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$: $\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$

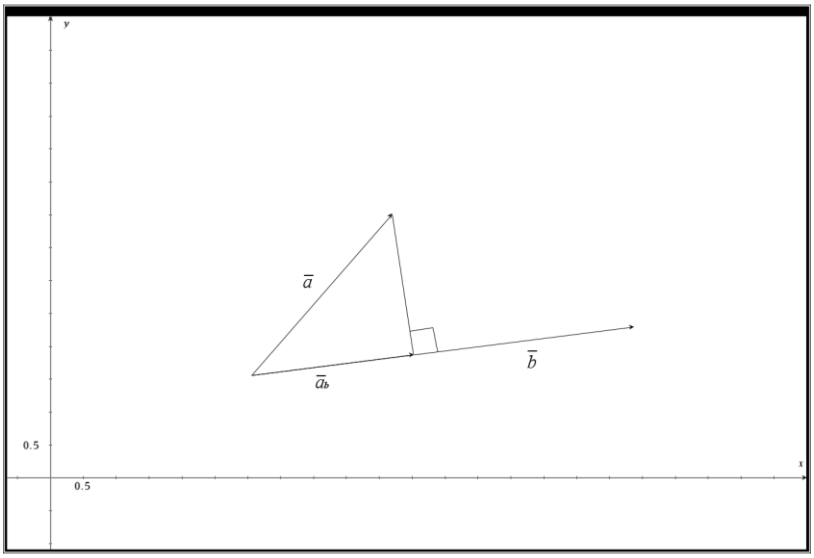
13. Determinant: $\det(\vec{a}, \vec{b}) = \hat{\vec{a}} \cdot \vec{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

14. $\det(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(v)$, hvor v er vinklen mellem vektor $\vec{a}$ og $\vec{b}$

15. Parallelle vektorer: $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \det(\vec{a}, \vec{b}) = 0$

16. Arealet A af parallelogrammet udspændt af vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$: $A = |\det(\vec{a}, \vec{b})|$

17. Projektion af vektor $\vec{a}$ på vektor $\vec{b}$: $\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$



18. Længden af projektionen af vektor $\vec{a}$ på vektor $\vec{b}$: $|\vec{a}_{\vec{b}}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$

18. Linjer i planen vha. vektorer

1. Den rette linje gennem $P_0(x_0, y_0)$ med normalvektor $\vec{n} = \binom{a}{b}$, har en ligning på formen: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

2. Den rette linje gennem $P_0(x_0, y_0)$ med retningsvektor $\vec{r} = \binom{r_1}{r_2}$ har en parameterfremstilling på formen: $\binom{x}{y} = \binom{x_0}{y_0} + t \cdot \binom{r_1}{r_2}, t \in \mathbb{R}$

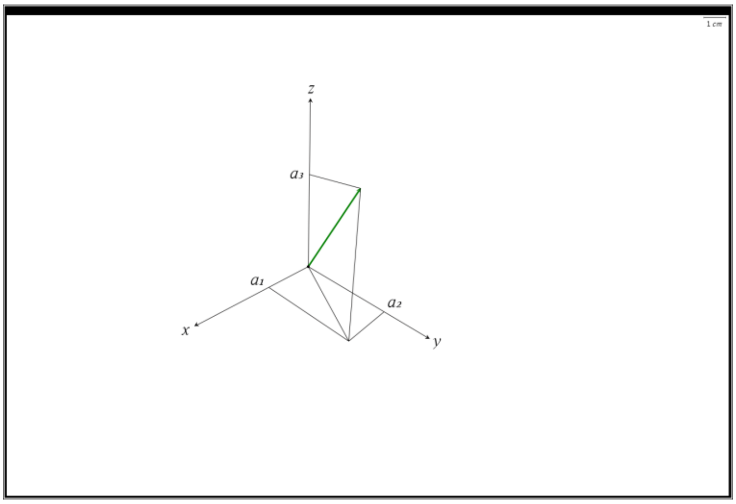
3. Afstanden fra punktet $A(x_1, y_1)$ til linjen $l: ax + by + c = 0$:
$\text{dist}(A, l) = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

19. Cirklen

1. Cirklen med centrum i $C(a, b)$ og radius r: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

20. Vektorer i rummet

1. Koordinaterne til vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$



2. Længden af vektor $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

3. $k\vec{a} = k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$

4. $\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$

5. Koordinaterne til vektoren fra punktet $A(x_1, y_1, z_1)$ til punktet $B(x_2, y_2, z_2)$:
   $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$

6. Skalarprodukt/prikprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

7. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

8. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(v)$, hvor v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$

9. $\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, hvor v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$

10. Ortogonale vektorer: $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

11. Projektion af vektor $\vec{a}$ på vektor $\vec{b}$: $\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$

12. Vektorprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

13. Længden af vektorproduktet $\vec{a} \times \vec{b}$:
    $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(v)$, hvor v er vinklen mellem vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$

14. Parallelogrammet udspændt af vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$ har arealet: $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$

21. Planer i rummet og afstande

1. Planen gennem punktet $P_0(x_0, y_0, z_0)$ med normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

   $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

2. Afstanden mellem punktet $P_1(x_1, y_1, z_1)$ og planen α: $ax + by + cz + d = 0$

   $\text{dist}(P_1, \alpha) = \dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

3. Projektion $\vec{a}_\alpha$ af vektor $\vec{a}$ på planen α med normalvektor $\vec{n}$:

   $\vec{a}_\alpha = \vec{a} - \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}$

22. Kuglen

1. Kuglen med centrum i $C(a, b, c)$ og radius r:
   $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$

23. Linjer i rummet og afstande

1. En parameterfremstilling for den rette linje gennem $P_0(x_0, y_0, z_0)$ med retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$

2. Afstanden mellem punktet P og linjen l med retningsvektor $\vec{r}$:
   $\text{dist}(P, l) = \frac{|\vec{r} \times \overrightarrow{PP_1}|}{\vec{r}}$, hvor P_1er et punkt på linjen l

3. Afstand mellem de vindskæve linjer $l_1$og l_2, med retningsvektorer $\overrightarrow{r_1}$ og $\overrightarrow{r_2}$:
   $\text{dist}(l_1, l_2) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{n}|}$, hvor P_1 og P_2 er punkter på hhv. l_1 og l_2