

Funktioner 2

Hvis man ønsker mere udfordring, kan man springe de første 7 opgaver over.

Opgave 1

Funktionerne f og g har regneforskrifterne

$$f(x) = 2x + 5 \quad \text{og} \quad g(x) = -3x + 1.$$

Løs ligningerne

1) $(f + g)(x) = f(x)$

2) $(f - g)(x) = 19$

3) $(f \cdot g)(x) = g(-3)$

4) $(3g)(x) = 21$

5) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = f(-2)$

6) $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = f(-2)$

Opgave 2

Bestem forskrifter for $f \circ g$ og $g \circ f$, når

1) $f(x) = 2x + 4$ og $g(x) = x + 3$

2) $f(x) = 2$ og $g(x) = \frac{1}{2}x - 5$

3) $f(x) = x^2 + x$ og $g(x) = -x + 2$

Opgave 3

Angiv forskrifter for funktioner f og g , så

1) $(f \circ g)(x) = (x - 1)^2$

2) $(f \circ g)(x) = \sqrt{x - 2}$

3) $(f \circ g)(x) = (2x + 1)^2 - 2$

4) $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$

5) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{2x - 1}$

6) $(f \circ g)(x) = \frac{2}{\sqrt{x + 2}}$

Opgave 4

Idet $f(x) = x^2 + 3$ og $g(x) = x$, skal følgende ligninger løses:

- 1) $(fg)(x) = -g(x)$
- 2) $(f + g)(x + 1) = 3$
- 3) $(f - g)(x) \leq (x + 2) \cdot g(x)$
- 4) $(f + g)(x + 1) > (f - g)(x - 2)$
- 5) $f(x - 2) - f(x) = 3$
- 6) $f(x) + 4 \cdot g(x) = 0$

Opgave 5

Funktionerne f og g er givet ved, at

$$f(x) = 4x + 2 \text{ og } g(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

Bestem $f(-1), f(0), f(1), g(-2), g(2)$ og $g(6)$.

Benyt resultaterne til at afgøre, om $g = f^{-1}$.

Opgave 6

Bestem regneforskrifter for f^{-1}, g^{-1} og h^{-1} , når

- 1) $f(x) = 4x + 1, g(x) = 3x$ og $h(x) = \sqrt{x - 2}$
- 2) $f(x) = -x + 1, g(x) = -x$ og $h(x) = x^2 + 1, x > 0$

Opgave 7

Funktionerne f og g er givet ved

$$f(x) = \frac{x - 1}{1 - 2x} \text{ og } g(x) = \frac{x + 1}{1 + 2x}$$

Undersøg, om f og g er hinandens omvendte funktioner.

Opgave 8

For hver funktion f :

Angiv forskrift og definitions­mængde for den omvendte funktion, f^{-1} .

- 1) $f(x) = (x + 2)(x - 2), x \geq 0$
- 2) $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$
- 3) $f(x) = \sqrt{x - 2} + 3$

$$4) f(x) = \frac{1}{x+2}$$

$$5) f(x) = 3 \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

Opgave 9

Funktionerne f og g er givet ved: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ og $g(x) = 8x^2 - 4$.

- Bestem værdimængden for funktionen g .
- Bestem for $x > 0$ en forskrift for den inverse funktion g^{-1} .
- Bestem forskriften for den sammensatte funktion $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Opgave 10

Funktionerne f og g er givet ved forskrifterne: $f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}x - 5\right)$ og $g(x) = 4x + 2$.

- Bestem definitionsmængden for den sammensatte funktion: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Opgave 11

En funktion f er givet ved: $f(x) = \frac{x+1}{8-2x}$.

- Bestem definitionsmængden for f .
- Bestem forskriften for den inverse (omvendte) funktion f^{-1} .
- Angiv værdimængde for f^{-1} .

Opgave 12

Funktionerne f , g og h er givet ved

$$f(x) = (x+1)^2 - 3, x \leq -1,$$

$$g(x) = -1 + \sqrt{x+3} \text{ og } h(x) = -1 - \sqrt{x+3}$$

Gør rede for hvilken af funktionerne g og h , der er f^{-1} .

Angiv en forskrift for den omvendte funktion til den af g og h , der ikke er f^{-1} .

Opgave 13

En funktion f er givet ved: $f(x) = \ln(x)$ og en

funktion g er givet ved: $g(x) = x^2 - x - 2$.

- a) Bestem regneforskriften for den sammensatte funktion

$$f(g(x)) = (f \circ g)(x).$$

- b) Bestem definitionsmængden for den sammensatte funktion

$$f(g(x)) = (f \circ g)(x).$$

Opgave 14

En funktion f er givet ved: $f(x) = \sqrt{x}$, en funktion g er givet ved:

$g(x) = x^2 + x - 2$ og en funktion h er givet ved: $h(x) = \ln(2x + 1)$.

- a) Bestem definitionsmængden for den sammensatte funktion

$$f(g(x)) = (f \circ g)(x).$$

- b) Bestem forskriften for den omvendte funktion $h^{-1}(x)$ til funktionen h .

Opgave 16

Givet de to funktioner $f(x) = \sqrt{x}$ og $g(x) = \ln(x^2 + 1)$

- a) Bestem en regneforskrift for sammensætningen

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ samt definitionsmængden for denne.}$$

Opgave 17

To funktioner f og g er givet ved: $f(x) = \ln(x + 2)$ og $g(x) = x^2 - 3x$.

- a) Bestem værdimængden for funktionen g .

- b) Bestem definitionsmængden for den sammensatte funktion

$$f(g(x)) = (f \circ g)(x).$$

Opgave 18

Funktionerne f og g er givet ved: $f(x) = \ln(2x)$ og $g(x) = x^2 + 2x - 3$.

- a) Bestem værdimængden for funktionen g .

- b) Bestem en forskrift for den sammensatte funktion $f(g(x))$.

- c) Bestem en forskrift for den inverse funktion f^{-1} .

Facit

Opgave 1

$$1) x = \frac{1}{3} \quad 2) x = 3 \quad 3) L = \left\{ -\frac{5}{3}; -\frac{1}{2} \right\}$$

$$4) x = -2 \quad 5) x = -\frac{4}{5} \quad 6) x = -\frac{4}{5}$$

Opgave 2

$$1) (f \circ g)(x) = 2x + 10 \text{ og } (g \circ f)(x) = 2x + 7$$

$$2) (f \circ g)(x) = 2 \text{ og } (g \circ f)(x) = -4$$

$$3) (f \circ g)(x) = x^2 - 5x + 6 \text{ og } (g \circ f)(x) = -x^2 - x + 2$$

Opgave 3

$$1) f(x) = x^2 \quad \text{og} \quad g(x) = x - 1$$

$$2) f(x) = \sqrt{x} \quad \text{og} \quad g(x) = x - 2$$

$$3) f(x) = x^2 - 2 \quad \text{og} \quad g(x) = 2x + 1$$

$$4) f(x) = \sqrt{x} \quad \text{og} \quad g(x) = x^2 + 2x$$

$$5) f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{og} \quad g(x) = 2x - 1$$

$$6) f(x) = \frac{2}{x} \quad \text{og} \quad g(x) = \sqrt{x + 2}$$

Opgave 4

$$1) x = 0 \quad 2) L = \{-2; -1\} \quad 3) x \in [1; \infty[$$

$$4) x \in \left] \frac{1}{2}; \infty \right[\quad 5) x = \frac{1}{4} \quad 6) L = \{-3; -1\}$$

Opgave 5

$$f(-1) = -2, \quad f(0) = 2, \quad f(1) = 6,$$

$$g(-2) = -\frac{3}{4}, \quad g(2) = \frac{1}{4}, \quad g(6) = \frac{5}{4}.$$

Nej

Opgave 6

$$1) f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}, \quad g^{-1}(x) = \frac{1}{3}x, \quad h^{-1}(x) = x^2 + 2$$

$$2) f^{-1}(x) = 1 - x, \quad g^{-1}(x) = -x, \quad h^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$$

Opgave 7

Ja, de er.

Opgave 8

$$1) f^{-1}(x) = \sqrt{x + 4}, \quad \text{Dm}(f^{-1}) = [-4; \infty[$$

$$2) f^{-1}(x) = \frac{1}{x - 3}, \quad \text{Dm}(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$3) f^{-1}(x) = (x - 3)^2 + 2, \quad \text{Dm}(f^{-1}) = [3; \infty[$$

$$4) f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 2, \quad \text{Dm}(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$5) f^{-1}(x) = 2 \cdot e^{\frac{x}{3}}, \quad \text{Dm}(f^{-1}) = \mathbb{R}$$

Opgave 9

$$a) \text{Vm}(g) = [-4; \infty[,$$

$$b) f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x + 4}{8}}$$

$$c) (f \circ g)(x) = 4x^2 - 1$$

Opgave 10

$$\text{a) } \text{Dm}(f \circ g) = \left] -\frac{1}{2}; -\frac{9}{20} \right[$$

Opgave 11

$$\text{a) } \text{Dm}(f) = \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

$$\text{b) } f^{-1}(x) = \frac{8x - 1}{2x + 1}$$

$$\text{c) } \text{Vm}(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

Opgave 12

$$f^{-1}(x) = h(x)$$

$$g^{-1}(x) = (x + 1)^2 - 3$$

Opgave 13

$$\text{a) } (f \circ g)(x) = \ln(x^2 - x - 2)$$

$$\text{b) } \text{Dm}(f \circ g) =]-\infty; -1[\cup]2; \infty[$$

Opgave 14

$$\text{a) } \text{Dm}(f \circ g) =]-\infty; -2[\cup]1; \infty[$$

$$\text{b) } h^{-1}(x) = \frac{e^x - 1}{2}$$

Opgave 15

$$\text{a) } \text{Dm}(f \circ g) = [0; \infty[$$

Opgave 16

a) $Vm(g) = \mathbb{R}$

b) $Dm(f \circ g) =]-\infty; 1[\cup]2; \infty[$

Opgave 17

a) $Vm(g) = \mathbb{R}$

b) $f \circ g(x) = \ln(2x^2 + 4 - 6)$

c) $f^{-1}(x) = \frac{e^x}{2}$