

Differentialregning 1

Hvis man ønsker mere udfordring, kan man springe de første 6 opgaver over.

Opgave 1

Udregn $f'(1)$ i hvert af følgende tilfælde

1) $f(x) = \sqrt{x} + 4x - 7$

2) $f(x) = 3x^2 + x^{\frac{1}{2}}$

3) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - 5)$

4) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 5$

5) $f(x) = \frac{2x^2 - x}{\sqrt{x}}$

6) $f(x) = \frac{3x + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Opgave 2

Bestem $f'(x)$ i hvert af følgende tilfælde

$f_1(x) = x \cdot \sqrt{x}$, $f_2(x) = (2x^2 - 5x) \cdot (x^2 + 6)$,

$f_3(x) = (3\sqrt{x} - 1) \cdot (x^2 - 7x)$, $f_4(x) = (\sqrt{x} + 3) \cdot (\sqrt{x} - 3)$,

$f_5(x) = \frac{x-3}{x-1}$, $f_6(x) = \frac{2x^2-3x}{3x^2+1}$, $f_7(x) = \frac{x+3}{4-x}$

$f_8(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x}$, $f_9(x) = \frac{x^2-8}{x^2+1}$, $f_{10}(x) = \frac{4}{\sqrt{x}-1}$

Opgave 3

Bestem $f'(x)$ i hvert af følgende tilfælde

$f_1(x) = (3x^2 - x) \cdot 5^x$, $f_2(x) = \frac{2e^{2x}}{x^2}$, $f_3(x) = e^{3x} \cdot e^x$

$$f_4(x) = \frac{2 \cdot e^x}{4x^2 + x}, \quad f_5(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, \quad f_6(x) = (5 \cdot e^{3x} - e^x) \cdot x^2$$

$$f_7(x) = \ln(x^3), \quad f_8(x) = (\ln x)^2, \quad f_9(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f_{10}(x) = \ln(-4x), \quad f_{11}(x) = 2^x - 5 \cdot \ln x, \quad f_{12}(x) = \ln x - 2x$$

Opgave 4

Bestem $f'(x)$ i hvert af følgende tilfælde

$$f_1(x) = x^2 + 4x^2 - 3x + 1, \quad f_2(x) = (2x^4 - 1)^3, \quad f_3(x) = \sqrt{2x + 1}$$

$$f_4(x) = (3x - 2)^{-3}, \quad f_5(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2, \quad f_6(x) = \sqrt{3x^2 - x}$$

$$f_7(x) = (1 + 2^x)^3, \quad f_8(x) = (2 \cdot e^x + 4)^3.$$

Opgave 5

En funktion f er givet ved: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 1$, og en anden funktion g er givet

ved: $g(x) = x^2$.

Beregn differentialkvotienten for den sammensatte funktion $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Opgave 6

a) En funktion f er givet ved: $f(x) = 2x^2 - x$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

b) En funktion f er givet ved: $f(x) = 2e^{2x} + x$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, 2)$.

c) En funktion f er givet ved forskriften: $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet

$P(\ln(4), f(\ln(4)))$.

d) En funktion f er givet ved: $f(x) = \ln(x - 2) + x$.

Bestem en ligning for tangenten til funktionens graf i punktet

$(3, f(3))$.

e) Funktionen f er givet ved: $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x} + \frac{5}{2}$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

Opgave 7

En funktion f er givet ved $f(x) = 3e^{-2x}$

Beregn en ligning for den linje l , der indeholder punktet $P(-1, 5)$ og er parallel med tangenten til grafen for f i punktet $Q(0, f(0))$.

Opgave 8

En funktion f er givet ved: $f(x) = 3\ln(x) + k \cdot x$, $x > 0$, hvor k er en konstant.

I punktet $P(1, -1)$ har grafen for f en tangent med ligningen: $y = 2x - 3$.

Bestem konstanten k .

Opgave 9

En funktion f er givet ved: $f(x) = x^2 - 6x + 5$, og en ret linje er givet ved: $y = 2x + 3$.

Undersøg om linjen er tangent til grafen for f .

Opgave 10

Funktionen f er givet ved: $f(x) = \ln(2x^2) + 4x$.

Bestem koordinaterne til det punkt på grafen for f , hvor der er vandret tangent.

Opgave 11

En funktion f er givet ved: $f(x) = x^2 + b \cdot x + 1$, hvor b er et tal.

I punktet $P(2, f(2))$ har grafen for f en tangent med ligningen: $y = 6x - 3$.

Beregn b .

Opgave 12

En funktion f er givet ved forskriften: $f(x) = \ln(x^2) + \ln(5x)$.

Funktionen kan skrives på formen $f(x) = a \cdot \ln(x) + b$, hvor a og b er konstanter.

a) Bestem konstanterne a og b .

- b) Bestem en ligning for den tangent til grafen for f , som er vinkelret på linjen givet ved ligningen: $3y + x = 1$.

Opgave 13

- a) En funktion f er givet ved: $f(x) = 2 \ln(x^2 + 3)$.

Løs ved beregning ligningen $f'(x) = 1$

- b) En funktion f er givet ved: $f(x) = e^{2x} - 4x$.

Løs ligningen $f'(x) = -2$.

Facit

Opgave 1

1) $f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + 4$

2) $f'(x) = 6 * x + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

3) $f'(x) = 1 - \left(\frac{5}{2\sqrt{x}}\right)$

4) $f'(x) = 2 - x$

5) $f'(x) = \left(\frac{6*x-1}{2\sqrt{x}}\right)$

6) $f'(x) = \left(\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)$

Opgave 2

$$f'_1(x) = \left(\frac{3 * \sqrt{x}}{2}\right), \quad f'_2(x) = 8 * x^3 - 15 * x^2 + 24 * x - 30,$$

$$f'_3(x) = \left(\frac{15 * x^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{2}\right) - 2 * x - \left(\frac{63 * \sqrt{x}}{2}\right) + 7,$$

$$f'_4(x) = 1,$$

$$f'_5(x) = \left(\frac{2}{(x-1)^2} \right), \quad f'_6(x) = \left(\frac{9 * x^2 + 4 * x - 3}{(3 * x^2 + 1)^2} \right),$$

$$f'_7(x) = \left(\frac{7}{(x-4)^2} \right)$$

$$f'_8(x) = \left(\frac{-(\sqrt{x} + 2)}{2 * x^2} \right), \quad f'_9(x) = \left(\frac{18 * x}{(x^2 + 1)^2} \right),$$

$$f'_{10}(x) = \left(\frac{-2}{\sqrt{x} * (\sqrt{x} - 1)^2} \right)$$

Opgave 3

$$f'_1(x) = (3 * \ln(5) * x^2 + (6 - \ln(5)) * x - 1) * 5^x,$$

$$f'_2(x) = \left(\frac{4x^2 e^{2x} - 4x e^{2x}}{x^4} \right), \quad f'_3(x) = 4e^{4x}, \quad f'_5(x) = \frac{2e^x + 2e^{2x}}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'_4(x) = \frac{8x^2 e^x + 2x e^x - 16x e^x - 2e^x}{(4x^2 + x)^2},$$

$$f'_6(x) = 15x^2 e^{3x} - x^2 e^x + 10x e^{3x} - 2x e^x$$

$$f'_7(x) = \left(\frac{3}{x} \right), \quad f'_8(x) = \left(\frac{2 \ln(x)}{x} \right), \quad f'_9(x) = \left(\frac{-1}{x} \right)$$

$$f'_{10}(x) = \left(\frac{1}{x} \right), \quad f'_{11}(x) = \ln(2) * 2^x - \left(\frac{5}{x} \right), \quad f'_{12}(x) = \left(\frac{1}{x} \right) - 2$$

Opgave 4

$$f'_1(x) = 10 * x - 3, \quad f'_2(x) = 24 * x^3 * (2 * x^4 - 1)^2, \quad f'_3(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2} * x + 1} \right)$$

$$f'_4(x) = \left(\frac{-9}{(3 * x - 2)^4} \right), \quad f'_5(x) = \left(\frac{-2 * (x + 1)}{x^3} \right)$$

$$f'_6(x) = \left(\frac{-\sqrt{3} * (\ln(x) + 1) * \sqrt{x^{-x}}}{2} \right)$$

$$f'_7(x) = 3 * \ln(2) * 2^x * (2^x + 1)^2,$$

$$f'_8(x) = 24 * \ln(e) * e^x * (e^x + 2)^2 .$$

Opgave 5

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \left(\frac{1}{2}\right) * x^4 - 4 * x^2 + 1$$

$$(f \circ g)'(x_0) = 2 * x_0^3 - 8 * x_0$$

Opgave 6

a) $y = 3 * x - 2$

b) $y = 5 * x + 2$

c) $y = x - 2 * (\ln(2) - 1)$

d) $y = 2 * x - 3$

e) $y = x + \left(\frac{7}{2}\right)$

Opgave 7

Tangenten til grafen for f er: $y = 3 - 6 * x$

l: $y = -6 * x - 1$

Opgave 8

$k = -1$

Opgave 9

Nej

Opgave 10

$$(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, -\ln(2) - 2\right)$$

Opgave 11

b=2

Opgave 12

a) $a=3$, $b=1,609$

b) $y = 3 * x + (\ln(5) - 3)$

Opgave 13

a) $x=1$ eller $x=3$

b) $x=0$
