

Differentialregning 1

Hvis man ønsker mere udfordring, kan man springe de første 7 opgaver over.

Opgave 1

Udregn $f'(1)$ i hvert af følgende tilfælde

1) $f(x) = \sqrt{x} + 4x - 7$

2) $f(x) = 3x^2 + x^{\frac{1}{2}}$

3) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - 5)$

4) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 5$

5) $f(x) = \frac{2x^2 - x}{\sqrt{x}}$

6) $f(x) = \frac{3x + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Opgave 2

Bestem $f'(x)$ i hvert af følgende tilfælde

$f_1(x) = x \cdot \sqrt{x}$, $f_2(x) = (2x^2 - 5x) \cdot (x^2 + 6)$,

$f_3(x) = (3\sqrt{x} - 1) \cdot (x^2 - 7x)$, $f_4(x) = (\sqrt{x} + 3) \cdot (\sqrt{x} - 3)$,

$f_5(x) = \frac{x-3}{x-1}$, $f_6(x) = \frac{2x^2-3x}{3x^2+1}$, $f_7(x) = \frac{x+3}{4-x}$

$f_8(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x}$, $f_9(x) = \frac{x^2-8}{x^2+1}$, $f_{10}(x) = \frac{4}{\sqrt{x}-1}$

Opgave 3

Bestem $f'(x)$ i hvert af følgende tilfælde

$f_1(x) = (3x^2 - x) \cdot 5^x$, $f_2(x) = \frac{(2e)^{2x}}{x^2}$, $f_3(x) = e^{3x} \cdot e^x$

$$f_4(x) = \frac{2 \cdot e^x}{4x^2 + x}, \quad f_5(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, \quad f_6(x) = (5 \cdot e^{3x} - e^x) \cdot x^2$$

$$f_7(x) = \ln(x^3), \quad f_8(x) = (\ln x)^2, \quad f_9(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f_{10}(x) = \ln(-4x), \quad f_{11}(x) = 2^x - 5 \cdot \ln x, \quad f_{12}(x) = \ln x - 2x$$

Opgave 4

Bestem $f'(x)$ i hvert af følgende tilfælde

$$f_1(x) = x^2 + 4x^2 - 3x + 1, \quad f_2(x) = (2x^4 - 1)^3, \quad f_3(x) = \sqrt{2x + 1}$$

$$f_4(x) = (3x - 2)^{-3}, \quad f_5(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2, \quad f_6(x) = \sqrt{3x^2 - x}$$

$$f_7(x) = (1 + 2^x)^3, \quad f_8(x) = (2 \cdot e^x + 4)^3.$$

Opgave 5

Bestem definitionsmængden for f og beregn $f'(x)$ når funktionen f er givet ved:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 7}$.

b) $f(x) = 2 \cdot 3^x + x^2$.

c) $f(x) = 3x + 2 + \sqrt{4x}$.

d) $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 2x$.

e) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$.

f) $f(x) = \ln(x - 2) + x^2$.

Opgave 6

En funktion f er givet ved: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 1$, og en anden funktion g er givet ved: $g(x) = x^2$.

Beregn differentialkvotienten for den sammensatte funktion $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Opgave 7

a) En funktion f er givet ved: $f(x) = 2x^2 - x$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

b) En funktion f er givet ved: $f(x) = 2e^{2x} + x$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, 2)$.

c) En funktion f er givet ved forskriften: $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(\ln(4), f(\ln(4)))$.

d) En funktion f er givet ved: $f(x) = \ln(x-2) + x$.

Bestem en ligning for tangenten til funktionens graf i punktet $(3, f(3))$.

e) Funktionen f er givet ved: $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x} + \frac{5}{2}$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

Opgave 8

En funktion f er givet ved $f(x) = 3e^{-2x}$

Beregn en ligning for den linje l , der indeholder punktet $P(-1, 5)$ og er parallel med tangenten til grafen for f i punktet $Q(0, f(0))$.

Opgave 9

En funktion f er givet ved: $f(x) = 3\ln(x) + k \cdot x$, $x > 0$, hvor k er en konstant.

I punktet $P(1, -1)$ har grafen for f en tangent med ligningen: $y = 2x - 3$.

Bestem konstanten k .

Opgave 10

En funktion f er givet ved: $f(x) = x^2 - 6x + 5$, og en ret linje er givet ved: $y = 2x + 3$.

Undersøg om linjen er tangent til grafen for f .

Opgave 11

Funktionen f er givet ved: $f(x) = \ln(2x^2) + 4x$.

Bestem koordinaterne til det punkt på grafen for f , hvor der er vandret tangent.

Opgave 12

En funktion f er givet ved: $f(x) = x^2 + b \cdot x + 1$, hvor b er et tal.

I punktet $P(2, f(2))$ har grafen for f en tangent med ligningen: $y = 6x - 3$.

Beregn b .

Opgave 13

En funktion f er givet ved forskriften: $f(x) = \ln(x^2) + \ln(5x)$.

Funktionen kan skrives på formen $f(x) = a \cdot \ln(x) + b$, hvor a og b er konstanter.

- Bestem konstanterne a og b .
- Bestem en ligning for den tangent til grafen for f , som er vinkelret på linjen givet ved ligningen: $3y + x = 1$.

Opgave 14

a) En funktion f er givet ved: $f(x) = 2 \ln(x^2 + 3)$.

Løs ved beregning ligningen $f'(x) = 1$.

b) En funktion f er givet ved: $f(x) = e^{2x} - 4x$.

Løs ligningen $f'(x) = -2$.

Opgave 15

Givet de to funktioner $f(x) = \sqrt{x} + 2$ og $g(x) = \ln(x^2 - 1)$.

- Bestem en regneforskrift for den sammensatte funktion $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ samt definitionsmængden for denne.
- Beregn differentialkvotienten for den sammensatte funktion $g \circ f$.

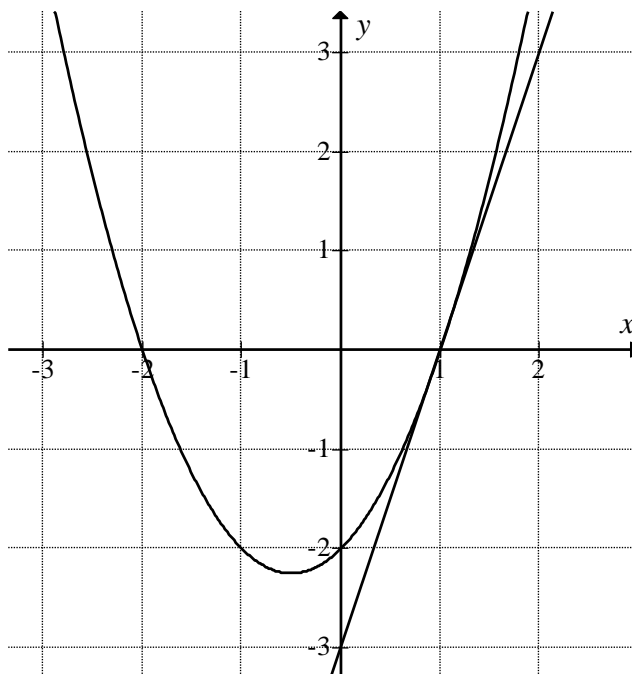
Opgave 16

En funktion f er givet ved $f(x) = x^2 - x + k$, hvor k er en konstant.

- Beregn for $k = -2$ en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $(1, f(1))$.
- Bestem de værdier af k , for hvilke grafen for f og linjen med ligningen $y = 3x - 6$ ikke har fællespunkter.

Opgave 17

På figuren ses grafen for et andengradspolynomium samt en tangent til grafen.



- Bestem ved hjælp af figuren en ligning for den viste tangent.
- Bestem ved hjælp af figuren en forskrift for andengradspolynomiet.