

# Differentialregning 2

---

Hvis man ønsker mere udfordring, kan man springe de første 7 opgaver over.

## Opgave 1

Udregn monotoniintervallerne for funktionerne

$$f_1(x) = 2x^2 + 2x - 4, \quad f_2(x) = x^4 - 2x^3$$

$$f_3(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2, \quad f_4(x) = x \cdot (x^2 - 3).$$

## Opgave 2

Tegn monotonilinjen for  $f(x) = 2e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$ . Angiv desuden funktionens mindsteværdi.

## Opgave 3

Udregn monotoniintervallerne for funktionerne

$$f_5(x) = \sqrt{8-x}, \quad f_6(x) = \frac{1}{2}x - \frac{x}{x^2-4},$$

$$f_3(t) = \frac{t}{t^2+2}, \quad f_4(t) = \frac{t^2+t-2}{t-1}$$

$$f_5(z) = \frac{2}{z^2+1}, \quad f_6(s) = \frac{s-1}{s^2}$$

## Opgave 4

Funktionen  $f$  er givet ved  $f(x) = -2x + \frac{x}{x^2-4}$ ,  $x \neq \pm 2$ .

Undersøg om  $f'(x) = -2 + \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$ .

Vis vha. udtrykket ovenfor, at  $f'(x) < 0$  for alle  $x$  i  $\text{Dm}(f)$ , og benyt dette til at angive de(t) interval(ler), hvor  $f$  er aftagende.

Er  $f$  aftagende?

### Opgave 5

Angiv definitionsmængden for  $f(x) = \frac{x^2 + ax}{x + b}$ . Undersøg derefter, om der findes konstanter  $a$  og  $b$ , så  $f$  har lokalt maksimum i  $(-4, -8)$ .

### Opgave 6

a) En funktion  $f$  er givet ved  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 8x + 1$ .

Bestem de intervaller hvori  $f$  er voksende.

b) En funktion  $f$  er givet ved:  $f(x) = \frac{-2}{1 + e^x}$ .

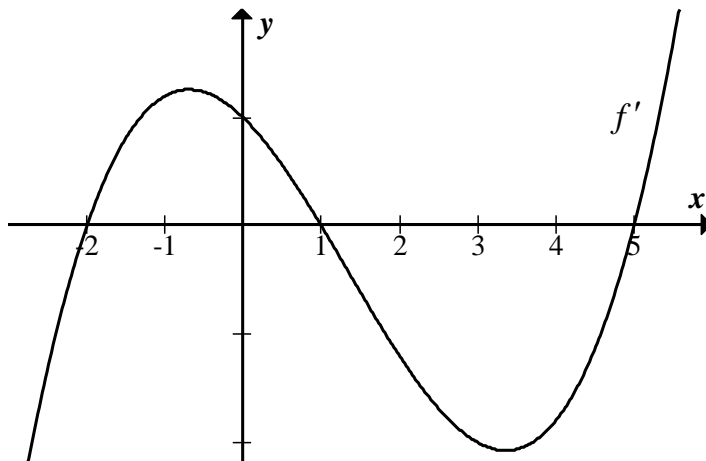
Beregn  $f'(x)$  og vis, at  $f$  er voksende.

c) En funktion  $f$  er givet ved:  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ ,  $x > 0$ .

Beregn  $f'(x)$  og vis, at  $f$  er voksende.

### Opgave 7

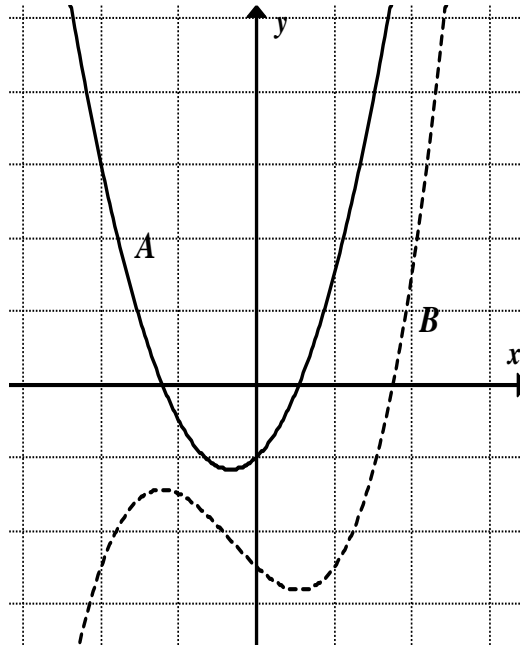
På figuren er vist grafen for den afledede funktion  $f'(x)$  af en funktion  $f(x)$ .



- a) Bestem ved hjælp af grafen  $x$ -værdierne til hvert af de lokale ekstremumpunkter for funktionen  $f$ .

### Opgave 8

På nedenstående figur er vist de grafiske billeder for en funktion  $f$ , og dens afledede,  $f'$ .



- a) Angiv med begrundelse, hvilken graf der afbilder grafen for  $f$  og hvilken der afbilder grafen for  $f'$ .

### Opgave 9

En funktion  $f$  er givet ved:  $f(x) = 4 \cdot x \cdot e^{\frac{1}{2}x}$

- a) Beregn funktionens mindste værdi.  
b) Løs ligningen  $f(x) = x$ .

### Opgave 10

Funktionen  $f$  er givet ved:  $f(x) = \frac{e^{x+1}}{4x-2}$ .

- a) Bestem definitionsmængden for funktionen  $f$ .  
b) Bestem ved hjælp af  $f'$  monotoniforholdene for funktionen  $f$ .  
c) Bestem koordinatsættet til det punkt på funktionens graf, hvor der er lokalt minimum.

### Opgave 11

En funktion  $f$  er givet ved:  $f(x) = (x-1)^2 \cdot e^{x+2}$ .

- Bestem ved hjælp af  $f'$  monotoniforholdene for funktionen.
- Bestem koordinatsættene til de lokale ekstremumpunkter.
- Bestem en ligning for tangenten til grafen for  $f$  i punktet  $P(0, f(0))$ .

### Opgave 12

En funktion  $f$  er givet ved:  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 9$ .

Grafen for  $f$  har to lokale ekstremumpunkter.

- Bestem koordinatsættene til disse ekstremumpunkter.

Grafen for  $f$  har to tangenter, der er vinkelrette på linjen med ligningen:  $x + 5y + 2 = 0$ .

- Bestem koordinatsættene til disse tangenters røringpunkter.

### Opgave 13

En funktion  $f$  er givet ved:  $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ .

- Bestem definitionsmængden for  $f$ .
- Bestem monotoniintervallerne for funktionen  $f$ .
- Bestem koordinatsættene til eventuelle ekstremumpunkter.
- Bestem en ligning for tangenten til grafen for  $f$  i punktet  $P(0, f(0))$ .

### Opgave 14

En funktion  $f$  er givet ved:  $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x-4}$

- Bestem  $f'(x)$  og løs ligningen  $f'(x) = 0$ .
- Bestem funktionens monotoniintervaller.
- Bestem koordinaterne til de punkter på funktionens graf, hvor grafen har lokale ekstremumpunkter.
- Bestem koordinaterne til skæringspunkterne mellem grafen for  $f$  og linjen givet ved ligningen  $y = 3x - 5$ .

## Opgave 15

En funktion  $f$  er givet ved:  $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{4x + 2}$ .

- Bestem definitionsmængden for  $f$  samt nulpunkterne for  $f$ .
- Bestem ved hjælp af  $f'$  monotoniforholdene for funktionen  $f$ .
- Bestem koordinatsættene til de lokale ekstremumpunkter.

En linje  $l$  er givet ved:  $y = -2x + k$ , hvor  $k$  er en konstant.

- For hvilke værdier af  $k$ , bliver linjen  $l$  tangent til grafen for  $f$ ?

---

## Facit

### Opgave 1

$f_1$  er aftagende i  $]-\infty; -\frac{1}{2}]$  og voksende i  $[-\frac{1}{2}; \infty[$ ,

$f_2$  er aftagende i  $]-\infty; \frac{3}{2}]$  og voksende i  $[\frac{3}{2}; \infty[$

$f_3$  er aftagende i  $[1; 3]$  og voksende i  $]-\infty; 1] \cup [3; \infty[$

$f_4$  er aftagende i  $[-1; 1]$  og voksende i  $]-\infty; -1] \cup [1; \infty[$

-----

### Opgave 2

$f(x)$  er aftagende i  $]-\infty; -\ln 2]$  og voksende i  $[-\ln 2; \infty[$ ,  
funktionens mindsteværdi er 2.

-----

### Opgave 3

$f_1$  er aftagende i  $]-\infty; 2[$

$f_2$  er voksende for alle  $x \in \mathbb{R}$

$f_3$  er aftagende i  $]-\infty; -\sqrt{2}[ \cup ]\sqrt{2}; \infty[$  og voksende i  $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$

$f_4$  er voksende for alle  $x \in \mathbb{R}$

$f_5$  er aftagende i  $]-\infty; 0]$  og voksende i  $[0; \infty[$

$f_6$  er aftagende i  $]-\infty; -2] \cup ]0; \infty[$  og voksende i  $[-2; 0[$

-----

### Opgave 4

Ja,  $f$  er aftagende i  $]-\infty; -2[ \cup ]-2; 2[ \cup ]2; \infty[$ ,

-----

### Opgave 5

Ja,  $a = 4$  og  $b = 4$

-----

### Opgave 6

a)  $f$  er voksende i  $]-\infty; -4] \cup [4; \infty[$

b)  $f'(x) = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$

c)  $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

-----

### Opgave 7

a) Lokalt minimum i  $x = 3$  og  $x = 2$       Lokalt maksimum i  $x = 1$

Opgave 8

a)  $A \Rightarrow f'$  og  $B \Rightarrow f$

---

Opgave 9

a)  $x = -\frac{8}{e}$  b)  $L = \{-4 \ln 2; 0\}$

Opgave 10

a)  $\text{Dm}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

b)  $f$  er aftagende i  $]-\infty; -\frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$  og voksende i  $]\frac{3}{2}; \infty[$

---

Opgave 11

a)  $f$  er voksende i  $]-\infty; -1] \cup [1; \infty[$  og aftagende i  $[-1; 1]$

b) Lokalt maksimum :  $(x, y) = (-1, 4e)$  og lokalt minimum :  $(x, y) = (1, 0)$

c)  $y = -e^2 \cdot x + e^2$

---

Opgave 12

a) Lokalt maksimum :  $(x, y) = \left(-1, \frac{32}{3}\right)$  og lokalt minimum :  $(x, y) = (3, 0)$

b)  $(x, y) = \left(-2, \frac{25}{3}\right)$  og  $(x, y) = \left(4, \frac{7}{3}\right)$

---

Opgave 13

a)  $\text{Dm}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b)  $f$  er aftagende i  $]-\infty; 1[ \cup ]1; 2]$  og voksende i  $[2; \infty[$

c) Lokalt maksimum :  $(x, y) = (2, e^2)$

d)  $y = -2x - 1$

---

Opgave 14

- a)  $L = \{2; 6\}$
  - b)  $f$  er voksende i  $]-\infty; 2] \cup [6; \infty[$  og aftagende i  $[2; 4[ \cup ]4; 6]$
  - c) Lokalt maksimum :  $(x, y) = (2, 1)$  og lokalt minimum :  $(x, y) = (6, 9)$
  - d)  $(x, y) = (2, 1)$  og lokalt minimum :  $(x, y) = (5, 10)$
- 

Opgave 15

- a)  $\text{Dm}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}, \quad L = \{0; 4\}$
  - b)  $f$  er voksende i  $]-\infty; -2] \cup [1; \infty[$  og aftagende i  $]-2; -\frac{1}{2}[ \cup ]-\frac{1}{2}; 1[$
  - c) Lokalt maksimum :  $(x, y) = (-2, -2)$  og lokalt minimum :  $(x, y) = \left( 1, \frac{5}{6} \right)$
  - d)  $k = 0$  og  $k = \frac{3}{2}$
-