Integralregning 1

Hvis man ønsker mere udfordring, kan man springe de første 7 opgaver over.

Opgave 1

Vis, at $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 9$ er en stamfunktion til $f(x) = x - 1$. Angiv derefter mindst tre andre stamfunktioner til f.

Opgave 2

Bestem uden brug af cas, en stamfunktion til hver af følgende funktioner

$f_1(x) = 2x + 1$, $f_2(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $f_3(x) = -2x - \frac{3}{x^2}$,

$f_4(x) = 4x^{-5}$, $f_5(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f_6(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,

$f_7(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$, $f_8(x) = 6x^3 + 3x^{-4} - \frac{5}{x^8}$, $f_9(x) = 1$,

$f_{10}(x) = \pi$, $f_{11}(x) = 0$, $f_{12}(x) = e^x$,

$f_{13}(x) = 3^x$, $f_{14}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f_{15}(x) = \frac{1}{x}, x > 0$

$f_{16}(x) = x^{1,3}$, $f_{17}(x) = 2e^{5x} + 2$, $f_{18}(x) = \frac{1}{2}e^{3x}$.

Opgave 3

Bestem uden brug af cas, en stamfunktion til hver af følgende funktioner

$f_1(x) = 7$, $f_2(x) = 2x - 8 - \frac{1}{x}, x > 0$,

$f_3(x) = x^{-5}$, $f_4(x) = 13^x$,

$f_5(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$, $f_6(x) = (x - 2) \cdot (3 - x)$,

$f_7(x) = (2x + 4)^2$, $f_8(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$,

$f_9(x) = e^{-6x}$, $f_{10}(x) = 5^{-2x}$,

$f_{11}(x) = 4^{2x-1}$, $f_{12}(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$,

$f_{13}(x) = \sqrt[3]{x}$, $f_{14}(x) = 2x^{-2} + x^{-1} + 9$,

$f_{15}(x) = \ln x$, $f_{16}(x) = x^{\frac{3}{4}}$.

Opgave 4

En funktion f er givet ved: $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Bestem den stamfunktion F til f, som opfylder: $F(1) = 4$.

Opgave 5

Benyt regneregler for bestemte integraler og skriv hvert af følgende integraler kortere. Bestem derefter integralerne.

a) $\int_1^2 (x-1)^2 dx - \int_1^2 x \cdot (x+2) dx$

b) $\int_0^2 (2x-3) dx + \int_0^2 (1-x) dx$

c) $\int_0^1 e^{2x} dx - \int_0^1 (1-e^x) \cdot (1+e^x) dx$

d) $\int_0^1 (x^2+x) dx - \int_0^1 x \cdot (x+1) dx$

e) $\int_1^2 \ln(x^2) dx - \int_1^2 (1 - 2\ln x) dx$

f) $\int_0^1 9^x dx - \int_0^1 (3^x - 1) \cdot (3^x + 1)\, dx$

Opgave 6

Om den kontinuerte funktion f oplyses, at

$$\int_{-1}^{2} f(x)\, dx = 3, \int_2^3 f(x) dx = 5 \; og \; \int_3^6 f(x) dx = 7.$$

Angiv

a) $\int_{-1}^{3} f(x)\, dx$, b) $\int_{-1}^{6} f(x) dx$, c) $\int_2^6 f(x) dx$.

Opgave 7

Om den kontinuerte funktion f oplyses, at

$$\int_{-1}^{2} f(x) dx = 2, \int_{-3}^{2} f(x) dx = 5 \; og \; \int_{-3}^{4} f(x) dx = 7.$$

Desuden gælder formlen

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$$

Angiv

a) $\int_{2}^{-1} f(x)dx\,,$ b) $\int_{-3}^{-1} f(x)dx\,,$ c) $\int_{2}^{4} f(x)\,dx$

d) $\int_{4}^{4} f(x)dx\,,$ e) $\int_{-1}^{4} f(x)dx\,,$ f) $\int_{2}^{-3} f(x)dx.$

Opgave 8

Benyt den angivne substitution til at bestemme

a) $\int \sqrt{(5x-3)dx}\,,$ $t = 5x - 3$

b) $\int \frac{3x}{x^2-2}\,dx,$ $t = x^2 - 2$

c) $\int x \cdot \sqrt{x^2-2}dx\,,$ $t = x^2 - 2$

d) $\int \ln(2x-3)dx\,,$ $t = 2x - 3$

e) $\int \frac{1}{x \cdot \ln x}dx,$ $t = \ln x$

f) $\int x \cdot \cos(x^2)dx\,,$ $t = x^2$

g) $\int \frac{\cos x}{2-\sin x}dx,$ $t = 2 - \sin x$

Opgave 9

Beregn ved hjælp af integration ved substitution følgende ubestemte integraler

a) $\int \frac{x^2+2x}{\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}}\,dx$

b) $\int x^2 \sin(x^3+1)\,dx$.

c) $\int \frac{1-\cos(x)}{\sqrt{x-\sin(x)}}\,dx$

d) $\int (2x+1)\cdot\cos(x^2+x)\,dx$

Opgave 10

Beregn ved hjælp af integration ved substitution følgende bestemte integral

a) $\int_0^1 (3x+1)^5 \, dx$

b) $\int_0^1 (3x^2+2x)\ln(x^3+x^2+1) \, dx$

c) $\int_{-1}^0 \frac{2x+3}{(x^2+3x+3)^3} \, dx$

d) $\int_0^{\pi/6} \cos(x)\cdot\sin^2(x)dx$

e) $\int_1^4 \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \, dx$

Opgave 11

Beregn følgende ubestemte integraler

a) $\int \frac{x e^{-x} + x^2}{x} \, dx$

b) $\int \frac{2}{\sqrt{x+4}} \, dx$

c) $\int \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{5}{x+4} \right) dx$

d) $\int \frac{x^3 - 5x^2 + 3x - 4}{x^2} \, dx, \quad x > 0$

e) $\int \ln(x^3+x)(6x^2+2) \, dx$

f) $\int \sin^3(x)\cdot 8\cos(x) \, dx$

Opgave 12

Beregn følgende bestemte integraler

a) $\int_1^2 \frac{x^4 + x^2 + 1}{x} \, dx$

b) $\int_1^2 \left(\frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} \right) dx$

c) $\int_1^4 2x\,(x+3\sqrt{x}+1)\,dx$

d) $\int_0^1 \frac{2e^x+2}{e^x+x}\,dx$

e) $\int_1^2 \left(3x^2 + \frac{2}{x} \right) dx$

f) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,dx$

Opgave 13

a) Beregn konstanten a således at: $\int_0^a 6\,e^{-2x}\,dx = 2$.

b) Beregn det positive tal k , således at $\int_0^k \frac{4x+1}{2x^2+x+2}\,dx = \ln(6)$.

c) Beregn k således at $\int_0^k x^2\,dx = 9$.

Opgave 14

Bestem følgende integraler

a) $\int \frac{\cos(\ln(x))}{2x}\,dx, \quad x > 0$

b) $\int \frac{x^5+x^3+x^2}{3x^4}\,dx, \quad x > 0$

c) $\int \frac{3}{2x-1} + e^{2x}\,dx, \; x > \frac{1}{2}.$

d) $\int \cos(x)\sqrt{\sin(x)}\,dx$

e) $\int_0^1 \frac{4x+2}{x^2+x+1}\,dx$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x)+1)\cos(x)dx$.

Opgave 15

En funktion *f* er givet ved

$$f(x) = 2x + 2\sin(x)\ ,\ x \in [0;2\pi]$$

a) Bestem *x*-værdien til de tangenter til grafen for *f*, som er parallelle med linjen bestemt ved ligningen $y = (2+\sqrt{3})x + 1$

b) Bestem den stamfunktion F til *f*, som opfylder at $F(0) = 5$.

Opgave 16

En funktion *f* er bestemt ved: $f(x) = (2x-1)\cdot\cos(2x^2 - 2x)$.

a) Beregn $\int f(x)dx$.

b) Bestem den stamfunktion til *f*, hvis graf går gennem punktet $P(0{,}4)$.

Opgave 17

En funktion *f* er givet ved

$$f(x) = 4\sin(x) - 2 \qquad , \ x \in [0\,;\,3\pi]$$

a) Beregn koordinaterne til skæringspunkterne mellem funktionens graf og x-aksen.

b) Bestem ved beregning forskriften for den stamfunktion F til *f*, hvis graf går gennem punktet $(0, 2)$.

Opgave 18

En harmonisk svingning er bestemt ved $f(t) = \sin(2t - \frac{\pi}{3})$.

a) Bestem perioden for *f*.

b) Bestem for $0 \le t \le 2\pi$ løsningerne til ligningen $f(t) = \frac{1}{2}$.

c) Bestem den stamfunktion til *f*, som indeholder punktet $(0, 1)$.

Facit

Opgave 1

$F(x)=\frac{1}{2}x^2-x+1$, $\quad F(x)=\frac{1}{2}x^2-x+9$, $\quad F(x)=\frac{1}{2}x^2-x+8$

_ _

Opgave 2

$F_1(x)=x^2+x+k,$ $\quad F_2(x)=x^3-x^2+x+k,$ $\quad F_3(x)=-x^2-\frac{3}{x}+k,$

$F_4(x)=-x^{-4}+k,$ $\quad F_5(x)=\sqrt{x}+k,$ $\quad F_6(x)=2\cdot\sqrt{x}+k,$

$F_7(x)=8\cdot\sqrt{x}+k,$ $\quad F_8(x)=\frac{3}{2}x^4-x^{-3}+\frac{5}{7}x^{-7}+k,$ $\quad F_9(x)=x+k,$

$F_{10}(x)=\pi x+k,$ $\quad F_{11}(x)=k,\ \ k\in\mathbb{R}$ $\quad F_{12}(x)=e^x+k,$

$F_{13}(x)=\frac{3^x}{\ln(3)}+k,$ $\quad F_{14}(x)=-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln(2)}+k,$ $\quad F_{15}(x)=\ln(x)+k$

$f_{16}(x)=\frac{1}{2{,}3}x^{2{,}3}+k,$ $\quad f_{17}(x)=\frac{2}{5}e^{5x}+2x+k,$ $\quad F_{18}(x)=\frac{1}{6}e^{3x}+k.$

_ _

Opgave 3

$F_1(x)=7x+k,$ $\quad F_2(x)=x^2-8x-\ln x+k,$ $\quad F_3(x)=-\frac{1}{4}x^{-4}+k,$

$F_4(x)=\frac{13^x}{\ln 13}+k,$ $\quad F_5(x)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}}{\ln 2}+k,$ $\quad F_6(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{2}x^2-6x+k,$

$F_7(x)=\frac{4}{3}x^3+8x^2+16x+k,$ $\quad F_8(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+k,$

$F_9(x)=-\frac{1}{6}e^{-6x}+k,$ $\quad F_{10}(x)=-\frac{5^{-2x}}{2\ln 5}+k,$ $\quad F_{11}(x)=-\frac{4^{2x}}{8\ln 4}+k,$

$F_{12}(x)=-\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}}{\ln(3)}+k,$ $\quad F_{13}(x)=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+k,$ $\quad F_{14}(x)=-2+\ln(|x|)+9x+k,$

$F_{15}(x)=x\cdot\ln(x)-x+k,$ $\quad F_{16}(x)=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+k.$

_ _

Opgave 4

$$F(x)=x^3+\ln x+3$$

Opgave 5

a) -5 b) -2 c) $e^2 - 2$ d) $k,$ $k \in \mathbb{R}$

e) $8 \cdot \ln 2 - 15$ f) 1

Opgave 6

a) 8 b) 15 c) 12

Opgave 7

a) -2 b) 3 c) 2 d) 0,

e) 4 f) -5

Opgave 8

a) $\frac{2}{15}\sqrt{(5x-3)^3} + k$ b) $-\frac{3}{(x^2-2)^2} + k$

c) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-2)^3} + k$ d) $\left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot \ln(2x-3) - 2x + 3 + k,$

e) $\ln(|\ln(x)|) + k$ f) $\frac{1}{2}\sin x^2 + k$

Opgave 9

a) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x^3+3x^2+1)^2} + k$ b) $-\frac{1}{3}\cos(x^3+1) + k$

c) $2\sqrt{x - \sin x} + k$ d) $\sin(x^2 + x) + k,$

Opgave 10

a) $\frac{455}{2}$ b) $3\ln(3) - 2$

c) $-\frac{5}{9}$ d) $\frac{1}{24}$ e) $\frac{16-\sqrt{3}}{3}$

Opgave 11

a) $-e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 + k$ b) $4\sqrt{x+4} + k$

c) $2\sqrt{x^2+4} + 5 \cdot \ln(|x+4|) + k$ d) $\frac{1}{2}x^2 - 5x + 3\ln(x) + 4x^{-1} + k,$

$e)$ $2 \cdot (x^3 + x) \cdot (\ln(x^3 + x) - 1) + k$ f) $2\sin^4 x + k$

———————————————————————

Opgave 12

a) $\dfrac{21 + \ln 2}{4}$ b) $\dfrac{3 + \ln 2}{2}$ c) $\dfrac{657}{5}$ d) $2 \cdot \ln(e + 1)$

$e)$ $7 + 2\ln 2$ f) $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

———————————————————————

Opgave 13

a) $a = \dfrac{\ln 3}{2}$ b) $k = 2$ c) $k = 3$

———————————————————————

Opgave 14

a) $\dfrac{1}{2}\sin(\ln x) + k$ b) $\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}\ln x - \dfrac{1}{x} + k$

c) $\dfrac{3}{2}\ln(2x - 1) + \dfrac{1}{2}e^{2x} + k$ d) $-\dfrac{2}{3}\sqrt{\sin^3(x)} + k,$

$e)$ $2 \cdot \ln 3$ f) $\dfrac{3}{2}$

———————————————————————

Opgave 15

a) $L = \left\{\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}\right\}$ b) c = 7

———————————————————————

Opgave 16

a) $\dfrac{1}{2}\sin(2x^2 - 2x) + k$ b) $\dfrac{1}{2}\sin(2x^2 - 2x) + 5$

———————————————————————

Opgave 17

a) $L = \left\{\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{13\pi}{6}; \dfrac{17\pi}{6}\right\}$ b) $-4\cos(x) - 2x + 6$

———————————————————————

Opgave 18

a) $T = \pi$ b) $L = \left\{\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{12}\right\}$ c) $-\dfrac{1}{2}\cos\left(2t - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{3}{2}$