

Integralregning 2

Hvis man ønsker mere udfordring, kan man springe de første 7 opgaver over.

Opgave 1

Angiv følgende bestemte integraler, og skraver på figurer de punktmængder, hvis arealer bestemmes.

a) $\int_0^2 x^4 dx$, b) $\int_1^2 x^{-5} dx$, c) $\int_1^e x^{-1} dx$,

d) $\int_{-3}^3 6 dx$, e) $\int_1^3 x\sqrt{x} dx$, f) $\int_0^{\ln 2} e^{4x} dx$,

g) $\int_0^1 2^x dx$, h) $\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{2}}{\sqrt{x}} dx$, i) $\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{x^2 - 9}{x - 3} dx$

Opgave 2

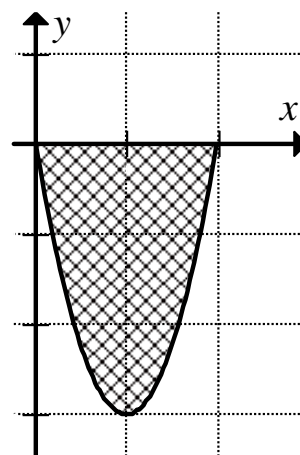
Bestem $a > 0$, så $\int_0^1 \sqrt{x} dx = \int_0^1 ax dx$. Skraver derefter, på en eller to figurer, de to punktmængder, der har samme areal.

Opgave 3

En funktion f er givet ved: $f(x) = 3x^2 - 6x$ for $0 \leq x \leq 2$

Et område er afgrænset af grafen for funktionen og x -aksen som vist på figuren.

- a) Beregn områdets areal.

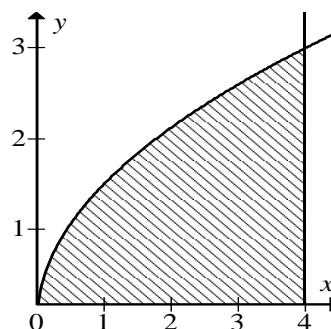


Opgave 4

En funktion f er givet ved: $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Et område er afgrænset af grafen for f , x -aksen og linjen $x = 4$ som vist på figuren.

- a) Beregn områdets areal.

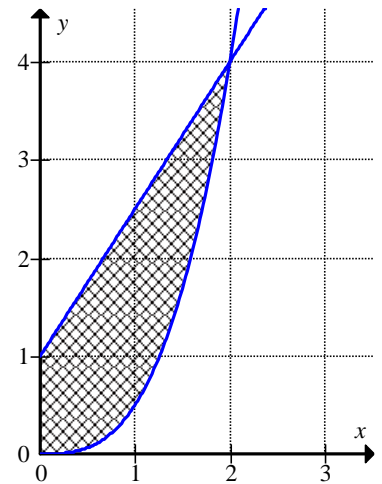


Opgave 5

To funktioner f og g er givet ved: $f(x) = 1 + \frac{3}{2}x$ og $g(x) = x^2$

Et område er afgrænset af graferne for de to funktioner og y -aksen som vist på figuren.

Beregn områdets areal.



Opgave 6

En funktion f er givet ved: $f(x) = -x^2 + 2x$.

Punktmængden M er afgrænset af grafen for funktionen f og x -aksen.

Bestem arealet af punktmængden M .

Opgave 7

En funktion f er givet ved $f(x) = -x^2 + 9$

Grafen for f afgrænser sammen med x -aksen og y -aksen et område M i 1. kvadrant.

- Skitsér grafen for f .
- Beregn arealet af M .

Opgave 8

Funktionerne f og g er givet ved: $f(x) = -x^2 + 9$ og $g(x) = 2x + 6$.

- Skitsér de to funktioners grafer og beregn arealet af det område, der afgrænses af de to grafer.

Opgave 9

En funktion f er givet ved: $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$,

og en funktion g er givet ved: $g(x) = 2x$.

- Skitsér de to funktioners grafer og beregn arealet af det område, der afgrænses af de to grafer og linjen $x = 3$.

Opgave 10

En funktion f er givet ved $f(x) = x^2, x \geq 0$, og en anden funktion g er givet ved $g(x) = \sqrt{x}$.

- a) Skitser de to funktioners grafer i samme koordinatsystem, og beregn koordinatsættene til deres skæringspunkter.

Området M er afgrænset af grafen for f og grafen for g .

- b) Skravér området M , og beregn arealet af dette område.

Opgave 11

En funktion f er givet ved: $f(x) = \frac{1}{16}x^2 + 4$.

- a) Bestem en ligning for den tangent til grafen for f , der har hældningskoefficient 1.

Grafen for f , tangenten med hældningskoefficient 1 samt koordinatsystemets y -akse afgrænser en punktmængde M .

- b) Bestem arealet af punktmængden M .

Opgave 12

Grafen for funktionen h er sammensat af graferne for funktionerne f og g , hvor

$$f(x) = x^2 - 4x + 3, \text{ hvor } x \leq 1 \text{ og } x \geq 3,$$

og

$$g(x) = -x^2 + 4x - 3, \text{ hvor } 1 \leq x \leq 3.$$

Tegn grafen for h , og beregn arealet af punktmængden

$$\{(x, y) | 0 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq h(x)\}$$

Opgave 13

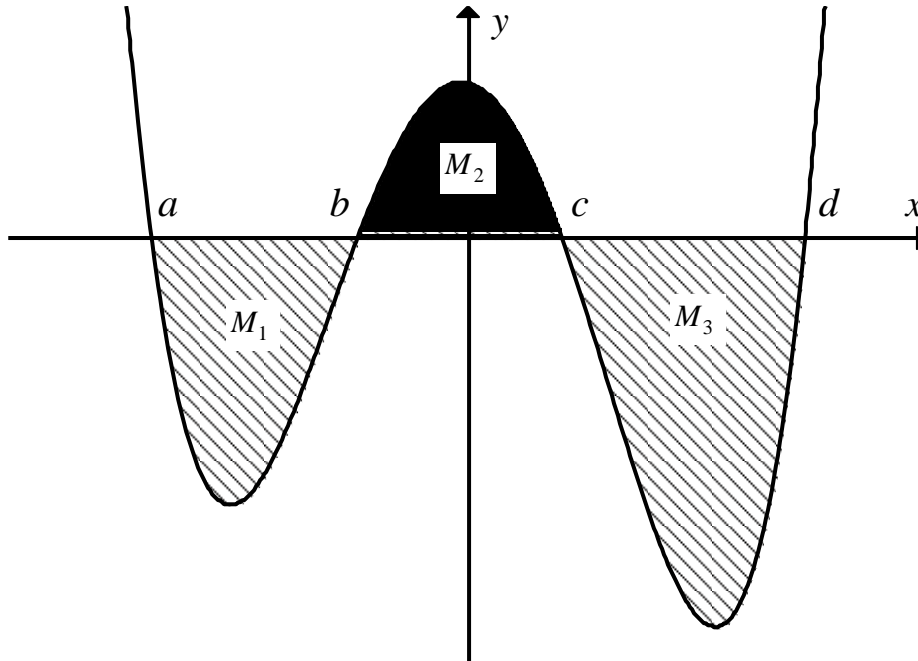
To funktioner er givet ved:

$$f(x) = 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) \quad \text{og} \quad g(x) = \tan\left(\frac{\pi}{6}x\right), \quad 0 \leq x < 3.$$

- a) Beregn koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem de to funktioners grafer.
- b) Beregn arealet af det område, der afgrænses af de to funktioners grafer.

Opgave 14

På figuren er vist grafen for en funktion f . Grafen for f afgrænser sammen med x -aksen tre punktmængder M_1, M_2 og M_3 .



Arealet af M_1 er 2,96.

Endvidere oplyses at $\int_a^c f(x) dx = -1,21$ og $\int_a^d f(x) dx = -6,22$.

- Beregn tallet $\int_b^c f(x) dx$.
- Beregn arealet af området M_3 .

Opgave 15

To funktioner f og g er givet ved $f(x) = x^2 + 1$ og $g(x) = x + 3$.

- Skitsér graferne for de to funktioner i samme koordinatsystem og skraver det område M , som afgrænnes af de to grafer.
- Bestem arealet af området M .

Opgave 16

En funktion f er givet ved: $f(x) = \frac{10x}{x^2 + 1}$, $x \geq 0$

Punktmængden M er afgrænset af grafen for f , x -aksen og linjen $x = a$.

- Beregn arealet af M udtrykt ved a .
- Beregn konstanten a , således at arealet af M bliver lig med 5.

Opgave 17

Graferne for funktionerne

$$f(x) = e^{ax} \quad \text{og} \quad g(x) = \frac{2}{x}$$

Skærer hinanden for $x = 1$. Bestem a .

Beregn derefter, for den fundne værdi af a , arealet af det område, der begrænses af graferne, koordinataakserne og linjen med ligningen $x = 4$.