

Integralregning 3

Hvis man ønsker mere udfordring, kan man springe de første 7 opgaver over.

Opgave 1

Skitser det omdrejningslegeme, der fremkommer, når grafen for $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ i $[-1, 2]$ drejes 360° om x -aksen.

Vis, at rumfanget er $\frac{153}{20}\pi$.

Opgave 2

Tegn en skitse, der viser det omdrejningslegeme, der fremkommer, når punktmængden M drejes 360° om x -aksen, og beregn derefter omdrejningslegemets rumfang, når

- a) $M = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq x^2\}$
- b) $M = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$
- c) $M = \{(x, y) | -2 \leq x \leq 2 \wedge -\frac{1}{2}x^2 - 1 \leq y \leq 0\}$

Opgave 3

En funktion f er givet ved: $f(x) = x^2 + 2$, $x \geq 0$ og en funktion g er givet ved:
 $g(x) = -x + 2$, $x \geq 0$.

Området M er begrænset af grafen for f , grafen for g samt linjen $x = 2$. Området drejes 360° om x -aksen, hvorved der fremkommer et omdrejningslegeme.

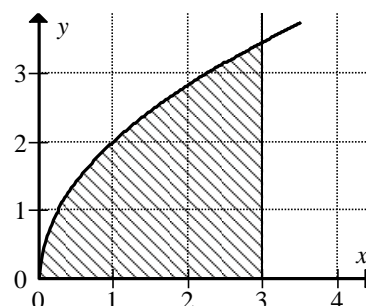
Bestem volumenet af dette omdrejningslegeme.

Opgave 4

En funktion er givet ved: $f(x) = 2\sqrt{x}$.

Et område er afgrænset af grafen for funktionen, x -aksen og linjen $x = 3$ som vist på figuren.

Området drejes 360° om x -aksen, hvorved der fremkommer et omdrejningslegeme.



Beregn volumenet af dette omdrejningslegeme.

Opgave 5

En funktion f er givet ved: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4$.

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(4, f(4))$.

Et område er afgrænset af grafen for f , tangenten til grafen for f i punktet P og y -aksen. Dette område drejes 360° om y -aksen.

b) Beregn volumenet af det omdrejningslegeme, der fremkommer.

Opgave 6

En funktion f er givet ved: $f(x) = \frac{12}{x+4}$, $x \geq 0$

Punktmængden M_1 er afgrænset af grafen for f , x -aksen, y -aksen og linjen $x = a$.

Punktmængden M_1 drejes 360° om x -aksen. Derved fremkommer et omdrejningslegeme.

a) Bestem ved beregning volumenet af omdrejningslegemet udtrykt ved a .

b) Beregn konstanten a , således at volumenet bliver lig med 20π .

Opgave 7

Funktionen f er givet ved: $f(x) = 3^x - 1$.

Punktmængden M_1 er afgrænset af grafen for f , linjen $x = 2$ og x -aksen.

a) Bestem arealet af punktmængden M_1 .

Funktionen g er givet ved: $g(x) = \sqrt{x+2}$ for $x \geq -2$.

Punktmængden M_2 er afgrænset af graferne for g , linjen $x = 7$ og x -aksen.

Når punktmængden M_2 drejes 360° omkring x -aksen fremkommer der et omdrejningslegeme.

b) Bestem volumenet af dette omdrejningslegeme.

Opgave 8

Funktionerne f og g er givet ved: $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ og $g(x) = x + 1$.

Punktmængden M_1 er afgrænset af grafen for f , grafen for g og x -aksen.

- a) Bestem arealet af punktmængden M_1 .

Punktmængden M_2 er afgrænset af grafen for f og grafen for g .

Når punktmængden M_2 drejes 360° omkring x -aksen fremkommer der et omdrejningslegeme.

- b) Bestem volumenet af dette omdrejningslegeme.

Opgave 9

To funktioner f og g er givet ved: $f(x) = x^2 - 5x + 8$ og $g(x) = 2x + 8$

Punktmængden M er afgrænset af graferne for f og g .

- a) Skitser graferne for f og g i samme koordinatsystem, og beregn koordinaterne til grafernes skæringspunkter.

Punktmængden M drejes 360° om y -aksen. Derved fremkommer et omdrejningslegeme.

- b) Beregn volumenet af dette omdrejningslegeme.

Punktmængden M drejes 360° om x -aksen. Derved fremkommer et omdrejningslegeme.

- c) Beregn volumenet af dette omdrejningslegeme.

Opgave 10

To funktioner, f og g er givet ved: $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ og $g(x) = \frac{3}{2}x$.

- a) Skitsér graferne for de to funktioner i samme koordinatsystem, og beregn koordinaterne til grafernes skæringspunkter.

Punktmængden M_1 er afgrænset af graferne for de to funktioner.

- b) Beregn arealet af punktmængden M_1 .

Punktmængden M_2 er i første kvadrant afgrænset af graferne for de to funktioner og y -aksen. Punktmængden M_2 drejes 360° omkring x -aksen.

- c) Beregn volumen af det omdrejningslegeme, som derved fremkommer.

Opgave 11

To funktioner er givet ved: $f(x) = \sin(x), x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ og $g(x) = \cos(2x), x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

- a) Skitser graferne for de to funktioner i samme koordinatsystem og vis, at de to funktioner skærer hinanden i punktet $P\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$.

Området M_1 er afgrænset af grafen for f , grafen for g og y -aksen.

- b) Beregn volumen af det omdrejningslegeme der fremkommer, når M_1 drejes 360° om x -aksen.

Området M_2 er afgrænset af grafen for f , grafen for g og x -aksen.

- c) Beregn arealet af området M_2 .

Opgave 12

To funktioner er givet ved:

$$f(x) = x + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2 \quad \text{og} \quad g(x) = 2x^2 - 3x + 2$$

, $0 \leq x \leq 2$.

- a) Skitsér graferne for de to funktioner og beregn koordinatsættene til grafernes skæringspunkter.

Et område M er afgrænset af de to funktioners grafer.

- b) Beregn arealet af området M .

Området M drejes 360° om x -aksen, hvorved der fremkommer et omdrejningslegeme.

- c) Beregn volumen af dette omdrejningslegeme.

Opgave 13

En funktion f er givet ved: $f(x) = 8\sqrt{x} - x^2, x \geq 0$.

- Beregn tallet $\int_0^1 f(x) dx$ og forklar ved hjælp af en skitse, hvilket område tallet angiver arealet af.
- Bestem det tal k i intervallet $[0;4]$, der opfylder $\int_0^k f(x) dx = 21$.

Et område M er afgrænset af grafen for f og x -aksen. Området M drejes 360° om x -aksen, hvorved der fremkommer et omdrejningslegeme.

- Beregn volumenet af dette omdrejningslegeme.

Opgave 14

To funktioner f og g er givet ved: $f(x) = 6 \cdot (1 - e^{-x})$ og $g(x) = e^x - 1$. For begge funktioner gælder, at $x \geq 0$.

- Skitsér graferne for de to funktioner og beregn koordinatsættene til deres skæringspunkter.

Et område M er afgrænset af de to funktioners grafer.

- Beregn områdets areal.

Området M drejes 360° om y -aksen, hvorved der fremkommer et omdrejningslegeme.

- Beregn volumenet af dette omdrejningslegeme.

Opgave 15

En funktion f er givet ved: $f(x) = 5 \sin(x-1)$, hvor $x \in [0; \pi + 1]$.

- Skitsér grafen for f og bestem koordinatsættene til dens nulpunkter.

Et område M_1 er afgrænset af grafen for f , x -aksen og y -aksen.

- Bestem arealet af M_1 .

Et område M_2 er afgrænset af grafen for f og x -aksen. Området M_2 drejes 360° om y -aksen, hvorved et omdrejningslegeme fremkommer.

- Beregn volumenet af dette omdrejningslegeme.

Facit

Opgave 1

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1, \quad F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 9, \quad F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 8$$

Opgave 2

$$\text{a) } V_x = \frac{32}{5}\pi, \quad \text{b) } V_x = 8\pi, \quad \text{c) } V_x = \frac{188}{15}\pi,$$

Opgave 3

$$V_x = \frac{112}{5}\pi$$

Opgave 4

$$V_x = 18\pi$$

Opgave 5

$$\text{a) } y = 2x \quad \text{b) } V_y = \frac{32}{3}\pi$$

Opgave 6

$$\text{a) } V_x = \frac{144\pi}{a+4} + 36\pi \quad \text{b) } a = 5$$

Opgave 7

$$\text{a) } \frac{8}{\ln 3} - 2 \quad \text{b) } V_x = \frac{81}{2}\pi$$

Opgave 8

a) $A(M_1) = \frac{61}{6}$ b) $V_x = \frac{384}{5}\pi$

Opgave 9

a) $(x, y) = (0, 8)$ og $(x, y) = (7, 22)$ b) $V_y = \frac{2401}{6}\pi$

Opgave 10

a) $(x, y) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ og $(x, y) = (2, 3)$ b) $A(M_1) = \frac{343}{48}$
c) $V_x = \frac{316}{15}\pi$

Opgave 11

b) $V_x = \frac{\pi}{4}$ c) $A(M_2) = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{4}$

Opgave 13

a) 5 c) $V_x = \frac{4608\pi}{35}$

Opgave 14

a) $L = \{0; \ln 6\}$ b) $A(M) = \frac{7}{2}(\ln 6)^2$ c) $V_y = 21(\ln 6)^3 - 7\pi(\ln 6)^3 + 60\pi$

Opgave 15

a) $L = \{1; \pi + 1\}$ b) $A(M_1) = 5 - 5\cos(-1)$ c) $V_y = 10\pi^2 + 20\pi$
