Integralregning 3

Hvis man ønsker mere udfordring, kan man springe de første 7 opgaver over.

Opgave 1

Skitser det omdrejningslegeme, der fremkommer, når grafen for $f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$ i $[-1,2]$ drejes 360° om x-aksen.

Vis, at rumfanget er $\frac{153}{20}\pi$.

Opgave 2

Tegn en skitse, der viser det omdrejningslegeme, der fremkommer, når punktmængden M drejes 360° om x-aksen, og beregn derefter omdrejningslegemets rumfang, når

a) $M=\{(x,y)|0\le x\le 2\wedge 0\le y\le x^2\}$
b) $M=\{(x.y)\big|0\le x\le 4\wedge 0\le y\le \sqrt{x}\}$
c) $M=\{(x,y)|-2\le x\le 2\wedge -\frac{1}{2}x^2-1\le y\le 0\}$

Opgave 3

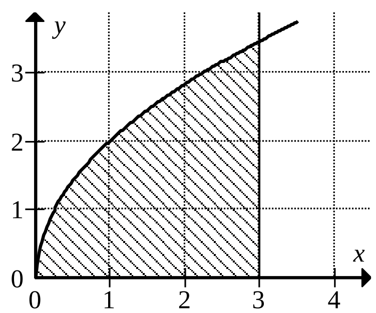
En funktion f er givet ved: $f(x)=x^2+2$, $x\ge 0$ og en funktion g er givet ved: $g(x)=-x+2, x\ge 0$.

Området M er begrænset af grafen for f, grafen for g samt linjen $x = 2$. Området drejes 360° om x-aksen, hvorved der fremkommer et omdrejningslegeme.

Bestem volumenet af dette omdrejningslegeme.

Opgave 4

En funktion er givet ved: $f(x)=2\sqrt{x}$.



Et område er afgrænset af grafen for funktionen, x-aksen og linjen $x = 3$ som vist på figuren.

Området drejes 360° om x-aksen, hvorved der fremkommer et omdrejningslegeme.

Beregn volumenet af dette omdrejningslegeme.

Opgave 5

En funktion *f* er givet ved: $f(x)=\frac{1}{4}x^2+4$.

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet $P\left(4, f(4)\right)$.

Et område er afgrænset af grafen for *f*, tangenten til grafen for *f* i punktet P og y-aksen. Dette område drejes 360° om y-aksen.

b) Beregn volumenet af det omdrejningslegeme, der fremkommer.

Opgave 6

En funktion *f* er givet ved: $f(x)=\frac{12}{x+4}$, $x \geq 0$

Punktmængden M_1 er afgrænset af grafen for *f*, x-aksen, y-aksen og linjen $x = a$.

Punktmængden M_1 drejes 360° om x-aksen. Derved fremkommer et omdrejningslegeme.

a) Bestem ved beregning volumenet af omdrejningslegemet udtrykt ved a.

b) Beregn konstanten a, således at volumenet bliver lig med 20π.

Opgave 7

Funktionen *f* er givet ved: $f(x)=3^x-1$.

Punktmængden M_1 er afgrænset af grafen for *f*, linjen $x=2$ og x-aksen.

a) Bestem arealet af punktmængden M_1.

Funktionen g er givet ved: $g(x)=\sqrt{x+2}$ for $x \geq -2$.
Punktmængden M_2 er afgrænset af graferne for g, linjen $x=7$ og x-aksen.
Når punktmængden M_2 drejes 360° omkring x-aksen fremkommer der et omdrejningslegeme.

b) Bestem volumenet af dette omdrejningslegeme.

Opgave 8

Funktionerne f og g er givet ved: $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ og $g(x) = x + 1$.

Punktmængden M_1 er afgrænset af grafen for f, grafen for g og x-aksen.

a) Bestem arealet af punktmængden M_1.

Punktmængden M_2 er afgrænset af grafen for f og grafen for g.
Når punktmængden M_2 drejes 360° omkring x-aksen fremkommer der et omdrejningslegeme.

b) Bestem volumenet af dette omdrejningslegeme.

Opgave 9

To funktioner f og g er givet ved: $f(x) = x^2 - 5x + 8$ og $g(x) = 2x + 8$

Punktmængden M er afgrænset af graferne for f og g.

a) Skitser graferne for f og g i samme koordinatsystem, og beregn koordinaterne til grafernes skæringspunkter.

Punktmængden M drejes 360° om y-aksen. Derved fremkommer et omdrejningslegeme.

b) Beregn volumenet af dette omdrejningslegeme.

Punktmængden M drejes 360° om x-aksen. Derved fremkommer et omdrejningslegeme.

c) Beregn volumenet af dette omdrejningslegeme.

Opgave 10

To funktioner, f og g er givet ved: $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ og $g(x) = \frac{3}{2}x$.

a) Skitsér graferne for de to funktioner i samme koordinatsystem, og beregn koordinaterne til grafernes skæringspunkter.

Punktmængden M_1 er afgrænset af graferne for de to funktioner.

b) Beregn arealet af punktmængden M_1 .

Punktmængden M_2 er i første kvadrant afgrænset af graferne for de to funktioner og y-aksen. Punktmængden M_2 drejes 360° omkring x-aksen.

c) Beregn volumenet af det omdrejningslegeme, som derved fremkommer.

Opgave 11

To funktioner er givet ved: $f(x) = \sin(x), x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ og $g(x) = \cos(2x), x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

a) Skitser graferne for de to funktioner i samme koordinatsystem og vis, at de to funktioner skærer hinanden i punktet $P\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$.

Området M_1 er afgrænset af grafen for f, grafen for g og y-aksen.

b) Beregn volumenet af det omdrejningslegeme der fremkommer, når M_1 drejes $360°$ om x-aksen.

Området M_2 er afgrænset af grafen for f, grafen for g og x-aksen.

c) Beregn arealet af området M_2.

Opgave 12

To funktioner er givet ved:

$$f(x) = x + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2 \text{ og } g(x) = 2x^2 - 3x + 2$$

$, 0 \le x \le 2.$

a) Skitsér graferne for de to funktioner og beregn koordinatsættene til grafernes skæringspunkter.

Et område M er afgrænset af de to funktioners grafer.

b) Beregn arealet af området M.

Området M drejes 360° om x-aksen, hvorved der fremkommer et omdrejningslegeme.

c) Beregn volumenet af dette omdrejningslegeme.

Opgave 13

En funktion f er givet ved: $f(x) = 8\sqrt{x} - x^2, x \geq 0$.

a) Beregn tallet $\int_0^1 f(x)\,dx$ og forklar ved hjælp af en skitse, hvilket område tallet angiver arealet af.

b) Bestem det tal k i intervallet $[0;4]$, der opfylder $\int_0^k f(x)\,dx = 21$.

Et område M er afgrænset af grafen for f og x-aksen. Området M drejes 360° om x-aksen, hvorved der fremkommer et omdrejningslegeme.

c) Beregn volumenet af dette omdrejningslegeme.

Opgave 14

To funktioner f og g er givet ved: $f(x) = 6 \cdot (1 - e^{-x})$ og $g(x) = e^x - 1$. For begge funktioner gælder, at $x \geq 0$.

a) Skitsér graferne for de to funktioner og beregn koordinatsættene til deres skæringspunkter.

Et område M er afgrænset af de to funktioners grafer.

b) Beregn områdets areal.

Området M drejes 360° om y-aksen, hvorved der fremkommer et omdrejningslegeme.

c) Beregn volumenet af dette omdrejningslegeme.

Opgave 15

En funktion f er givet ved: $f(x) = 5\sin(x-1)$, hvor $x \in [0; \pi + 1]$.

a) Skitsér grafen for f og bestem koordinatsættene til dens nulpunkter.

Et område M_1 er afgrænset af grafen for f, x-aksen og y-aksen.

b) Bestem arealet af M_1.

Et område M_2 er afgrænset af grafen for f og x-aksen. Området M_2 drejes 360° om y-aksen, hvorved et omdrejningslegeme fremkommer.

c) Beregn volumenet af dette omdrejningslegeme.