

Differentialligninger 1

Hvis man ønsker mere udfordring, kan man springe de første 7 opgaver over.

Opgave 1

Undersøg om $y = f(x)$ er en løsning til differentialligningen, når

a) $y = x \cdot y' - x^2$ og $f(x) = x^2 - 3x$.

b) $\frac{dy}{dx} = -x \cdot y$ og $f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}$.

c) $f'(x) = -f(x)$ og $f(x) = e^{-x}$.

Opgave 2

Undersøg, for hver af følgende differentialligninger, om $f(x)$ er en løsning:

a) $y' = y \cdot \cos x$ og $f(x) = e^{\sin x}$

b) $\frac{dy}{dx} = y^2 + 1$ og $f(x) = \tan x - 1$.

c) $\frac{dy}{dx} = x + y$ og $f(x) = x^2 - x$.

d) $y'' = 4y$ og $f(x) = 3e^{2x}$.

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ og $f(x) = x, x > 0$.

Opgave 3

a) Undersøg om $f(x) = x^3 + x^2 - 3$ er en løsning til differentiailligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(1 - y).$$

b) Undersøg om $f(x) = 2e^{-x} + xe^{-x}$ er løsning til differentiailligningen

$$y'' + 3y' + y = 0.$$

Opgave 4

a) En funktion f er givet ved: $f(x) = 2e^x - x - 1$.

Undersøg, om f er en løsning til differentiailligningen: $\frac{dy}{dx} = y + x$.

b) En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} = -y + 2$.

Undersøg, om funktionen $f(x) = 2 - e^{-x}$ er en løsning til differentialligningen.

Opgave 5

Undersøg, om $f(x) = 1$ er løsning til differentialligningen

$$y'' + 2y' + y = x.$$

Bestem derefter k , så $y = x + k$ er løsning.

Opgave 6

Vis, at $f(x) = -\sqrt{x^2 + k}$ er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

Bestem derefter k , så $f(1) = -2$.

Opgave 7

En funktion f er givet ved: $f(x) = 5x^2 + bx + 3$, hvor b er en konstant.

a) Bestem b så funktionen f er løsning til differentialligningen:

$$\frac{1}{2}x \cdot \frac{dy}{dx} = y + 3x - 3.$$

Opgave 8

En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} = -3y + ke^x$, hvor k er en konstant.

Bestem konstanten k således, at funktionen $y = f(x) = 2e^x$ bliver en løsning til differentialligningen.

Opgave 9

En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} = 2y - 4e^x$.

En funktion f er givet ved: $y = f(x) = 2e^{2x} + ke^x$, hvor k er en konstant.

Bestem konstanten k , således at funktionen f bliver en løsning til differentialligningen.

Opgave 10

En differentiaalligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} = k \cdot x \cdot y - 3x$, hvor k er en konstant.

Grafen for en partikulær løsning til differentiaalligningen har en tangent i punktet $P(1,4)$ med ligningen: $y = 5x - 1$.

Beregn konstanten k .

Opgave 11

- a) En differentiaalligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{2y}$, $y \neq 0$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen i punktet $P(4, 1)$ for den partikulære løsning, hvis graf går igennem punktet P .

- b) En differentiaalligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} + x \cdot y = 3x^4$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen i $P(1,4)$ for den partikulære løsning, hvis graf går igennem punktet P .

- c) En differentiaalligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} + x^2 y = x^2$.

Bestem en ligning for tangenten til den partikulære løsning, hvis graf går igennem punktet $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

Opgave 12

- a) En differentiaalligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} = 1 - y$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen i punktet $P(0, 5)$ for den partikulære løsning, der går gennem P .

- b) En differentiaalligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} = -2xy + 10x$.

Bestem en ligning for tangenten i punktet $P(1,3)$ til grafen for den partikulære løsning til differentiaalligningen, der indeholder punktet P .

- c) En differentiaalligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} = y + e^x$.

Bestem en ligning for tangenten i punktet $P(0, 2)$ til grafen for den partikulære løsning til differentialligningen, der indeholder punktet P .

Opgave 13

En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} = 3x^2y + x^2$.

- Bestem ligningen for tangenten til grafen for den løsning, hvis graf går gennem punktet $P(1, 2)$.
- Vis, at $f(x) = 5 \cdot e^{x^3} - \frac{1}{3}$ er en løsning til differentialligningen.

Facit

Opgave 1

- Ja.
- Nej.
- Ja.

Opgave 2

- a) Ja
 - b) Nej.
 - c) Nej.
 - d) Ja.
 - e) Ja .
-

Opgave 3

- a) Nej.
 - b) Nej.
-

Opgave 4

- a) Ja.
 - b) Ja.
-

Opgave 5

$f(x) = 1$ er ikke en løsning.

$$k = -2$$

Opgave 6

$$k = 3$$

Opgave 7

a) $b = -6$

Opgave 8

$k = 8$

Opgave 9

$k = 4$

Opgave 10

$k = 2$

Opgave 11

a) $y = \frac{3}{2}x - 5$

b) $y = -x + 5$

c) $y = 2x - \frac{7}{2}$

Opgave 12

a) $y = -4x + 5$

b) $y = 4x - 1$

c) $y = 2x + 2$

Opgave 13

a) $y = 7x - 9$
