Differentialligninger 1

Hvis man ønsker mere udfordring, kan man springe de første 7 opgaver over.

Opgave 1

Undersøg om $y = f(x)$ er en løsning til differentialligningen, når

a) $y = x \cdot y' - x^2$ og $f(x) = x^2 - 3x$.
b) $\dfrac{dy}{dx} = -x \cdot y$ og $f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}$.
c) $f'(x) = -f(x)$ og $f(x) = e^{-x}$.

Opgave 2

Undersøg, for hver af følgende differentialligninger, om $f(x)$ er en løsning:

a) $y' = y \cdot \cos x$ og $f(x) = e^{\sin x}$
b) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + 1$ og $f(x) = \tan x - 1$.
c) $\dfrac{dy}{dx} = x + y$ og $f(x) = x^2 - x$.
d) $y'' = 4y$ og $f(y) = 3e^{2x}$.
$e)$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ og $f(x) = x, x > 0$.

Opgave 3

a) Undersøg om $f(x) = x^3 + x^2 - 3$ er en løsning til differentailligningen
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(1 - y).$$

b) Undersøg om $f(x) = 2e^{-x} + xe^{-x}$ er løsning til differentialligningen
$$y'' + 3y' + y = 0.$$

Opgave 4

a) En funktion f er givet ved: $f(x) = 2e^x - x - 1$.

Undersøg, om f er en løsning til differentialligningen: $\dfrac{dy}{dx} = y + x$.

b) En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} = -y + 2$.

Undersøg, om funktionen $f(x) = 2 - e^{-x}$ er en løsning til differentialligningen.

Opgave 5

Undersøg, om $f(x) = 1$ er løsning til differnetialligningen
$$y'' + 2y' + y = x.$$
Bestem derefter k, så $y = x + k$ er løsning.

Opgave 6

Vis, at
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 - 1}, -1 < x < 1,$$
er løsning til differentialligningen $y' + 2xy = 0$ i intervallet $]-1, 1[$.
Er f løsning i intervallet $]1, 5[$? - og i $]-1, 5[$?

Opgave 7

Vis, at $f(x) = -\sqrt{x^2 + k}$ er løsning til differentialligningen
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$
Bestem derefter k, så $f(1) = -2$.

Opgave 8

En funktion *f* er givet ved: $f(x) = 5x^2 + bx + 3$, hvor b er en konstant.

a) Bestem *b* så funktionen *f* er løsning til differentialligningen:
$$\frac{1}{2}x \cdot \frac{dy}{dx} = y + 3x - 3.$$

Opgave 9

En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} = -3y + ke^{x}$, hvor *k* er en konstant.

Bestem konstanten k således, at funktionen $y = f(x) = 2e^{x}$ bliver en løsning til differentialligningen.

Opgave 10

En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} = 2y - 4e^x$.

En funktion *f* er givet ved: $y = f(x) = 2e^{2x} + ke^x$, hvor *k* er en konstant.
Bestem konstanten k, således at funktionen *f* bliver en løsning til differentialligningen.

Opgave 11

En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} = k \cdot x \cdot y - 3x$, hvor k er en konstant.
Grafen for en partikulær løsning til differentialligningen har en tangent i punktet $P(1,4)$ med ligningen: $y = 5x - 1$.
Beregn konstanten *k*.

Opgave 12

a) En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{2y} \quad , \quad y \neq 0$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen i punktet $P(4, 1)$ for den partikulære løsning, hvis graf går igennem punktet *P*.

b) En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} + x \cdot y = 3x^4$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen i $P(1,4)$ for den partikulære løsning, hvis graf går igennem punktet *P*.

c) En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} + x^2 y = x^2$.

Bestem en ligning for tangenten til den partikulære løsning, hvis graf går igennem punktet $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

Opgave 13

a) En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} = 1 - y$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen i punktet $P(0, 5)$ for den partikulære løsning, der går gennem P.

b) En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} = -2xy + 10x$.

Bestem en ligning for tangenten i punktet $P(1,3)$ til grafen for den partikulære løsning til differentialligningen, der indeholder punktet P.

c) En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} = y + e^x$.

Bestem en ligning for tangenten i punktet $P(0,2)$ til grafen for den partikulære løsning til differentialligningen, der indeholder punktet P.

Opgave 14

En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 y + x^2$.

a) Bestem ligningen for tangenten til grafen for den løsning, hvis graf går gennem punktet $P(1,2)$.

b) Vis, at $f(x) = 5 \cdot e^{x^3} - \frac{1}{3}$ er en løsning til differentialligningen.

Opgave 15

Der er givet differentialligningen:

$$(x + 2y)\frac{dy}{dx} = 12x - y.$$

En integralkurve går gennempunktet $P(7,9)$. Bestem en ligning for tangenten i P.

Bestem derefter de værdier af a, for hvilke $y = ax$ er løsninger til differentailligningen.

Opgave 16

Vis, at funktionen

$$N(t) = \frac{1}{-\frac{1}{2}t^2 - 2t + 2}, -4 < t < 0,$$

Er løsning til differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = (t + 2)N^2.$$

Angiv derefter koordinaterne til funktionens ekstrema.