Differentialligninger 2

Hvis man ønsker mere udfordring, kan man springe de første 7 opgaver over.

Opgave 1

Bestem den løsning til differentialligningen, der går gennem (a, b), når

1) $\frac{dy}{dx} = x$, $(a, b) = (1,2)$
2) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}$, $(a, b) = (1,1)$
3) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $(a, b) = (4,1)$
4) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, $(a, b) = \left(e, \frac{1}{2}\right)$

Opgave 2

Bestem den løsning til differentialligningen, hvis graf går gennem (x_0, y_0), når

a) $\frac{dy}{dx} = 3y$ og $(x_0, y_o) = (0,4)$
b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}y$ og $(x_0, y_0) = (\ln 4, 2)$
c) $\frac{dy}{dx} = 4^2 y$ og $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{4}, e^{-4}\right)$
d) $\frac{dy}{dx} = -2y$ og $(x_0, y_0) = (\ln 5,1)$

Opgave 3

Bestem en forskrift for den partikulære løsning, hvis graf går gennem punktet P, når

a) $\frac{dy}{dx} - y = 0$, $P(0,-1)$
b) $\frac{dy}{dx} = 12 - 3y$, $P(0,7)$
c) $\frac{dy}{dx} = 2 + 4y$, $P(0,2)$
d) $\frac{dy}{dx} - 6 + 3 \cdot y = 0$, $P(0,10)$

Opgave 4

En differentialligning er givet ved: $y' = 20 - 5y$.

a) Bestem den partikulære løsning $y = f(x)$ til differentialligningen, der opfylder at $f(0) = 6$.

Opgave 5

Funktionerne f, g og h er løsninger til differentialligningen

$$y' = 3y - 12.$$

Bestem en forskrift for hver af dem, når

$$f(1) = 5, g(1) = 4 \text{ og } h(1) = 3.$$

Opgave 6

En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x^2}$.

a) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen.

Opgave 7

En differentialligning er givet ved: $2\frac{dy}{dx} = y + e^{\frac{1}{2}x}$.

a) Bestem ligningen for tangenten til grafen i punktet $P(0,1)$ for den partikulære løsning til differentialligningen, der indeholder punktet $P(0,1)$.

b) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen.

Opgave 8

En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} = 0{,}02y(25 - y)$.

a) Bestem den partikulære løsning $y = f(x)$ til differentialligningen, hvis graf går igennem punktet $P(0{,}5)$.

Opgave 9

I et elektrisk kredsløb betegnes strømmen $I(t)$, hvor I er strømmen målt i ampere, og t er tiden målt i sekunder. Strømmen $I(t)$ er løsning til differentialligningen:

$$0,5\cdot\frac{dI}{dt}+5\cdot I=12\,.$$

Strømmen opfylder: $I(0)=0$.

a) Bestem strømmen som funktion af tiden.

b) Bestem det tidspunkt, hvor strømmen er 0,7 ampere.

Opgave 10

En differentialligning er givet ved: $\dfrac{dy}{dx}+\cos(x)\cdot y=5\cos(x)$.

a) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen.

En anden differentialligning er givet ved: $\dfrac{dy}{dx}=y\cdot(x^2+4)$.

b) Vis, at $y=f(x)=-2e^{\frac{1}{3}x^3+4x}$ er en løsning til denne differentialligning.

Opgave 11

En differentialligning er givet ved: $\dfrac{dy}{dx}+y=2\cdot e^{2x}+1$.

a) Vis, at funktionen $y=\dfrac{2}{3}e^{2x}+e^{-x}+1$ er en løsning til differentialligningen.

En anden differentialligning er givet ved: $\dfrac{dy}{dx}+y=2\cdot e^{2x}$.

b) Bestem ved beregning den fuldstændige løsning til denne differentialligning.

En tredje differentialligning er givet ved $\dfrac{dy}{dx}+y=2\cdot e^{2x}+2$.

c) Bestem ved beregning ligningen for tangenten til grafen for den løsning, hvis graf går gennem punktet $P(0,1)$.

Opgave 12

En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx}+ky=e^{-x}$, hvor k er et reelt tal.

a) Bestem k således at $y=f(x)=-\frac{1}{3}e^{-x}$ er en løsning til differentialligningen.

En anden differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\frac{3}{x}$, hvor $x>0$.

b) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen.

En partikulær løsning til differentialligningen indeholder punktet $P(1,b)$, og tangenten til grafen for denne løsning i punktet P har hældningskoefficienten 5.

c) Bestem tallet b.

Facit

Opgave 1

1) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}$

2) $y=\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+\frac{1}{3}$

3) $y=2\sqrt{x}-3$

4) $y=\ln(2x)+\mathrm{e}$

Opgave 2

a) $y=4\mathrm{e}^{3x}$

b) $y=2\ln(2)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

c) $y=\mathrm{e}^{16x-8}$

d) $y=25\mathrm{e}^{-2x}$

Opgave 3

a) $y = -\mathrm{e}^{x}$
b) $\mathrm{y} = 4 + 3\mathrm{e}^{-3x}$
c) $y = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\mathrm{e}^{4x}$

Opgave 4

a) $y = 4 + 2\mathrm{e}^{-5x}$

Opgave 5

$f(1) = 5$, $y = 4\mathrm{e}^{3x-3}$
$g(1) = 4$, $y = 4$
$h(1) = 3$, $y = 4 - \mathrm{e}^{3x-3}$

Opgave 6

$y = x \cdot \mathrm{e}^{-x^2} + c_1 \cdot \mathrm{e}^{-x^2} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$

Opgave 7

a) $y = x + 1$

b) $y = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2}x + c$

Opgave 8

a) $y = \frac{25}{1 + 4 \cdot e^{-0{,}02x}}$

Opgave 9

a) $y = \frac{12}{5} - \frac{12}{5} \cdot e^{-10t}$

b) $t = -\frac{\ln\frac{17}{24}}{10}$ eller $t = 0.034$

Opgave 10

a) $y = (-5e^t + c) \cdot e^{\sin(x)}$

b) Ja

Opgave 11

b) $y = 2e^{-x}\left(\frac{2}{3}e^{3x} + c\right)$

c) $y = 3x + 1.$

Opgave 12

a) $k = -2$

b) $y = e^{-\ln(x)} \cdot (3e^t + c)$

c) $b = -2$
