# Differentialligninger 2

**Hvis man ønsker mere udfordring, kan man springe de første 7 opgaver over.**

**Opgave 1**

Bestem den løsning til differentialligningen, der går gennem $(a, b)$, når

1) $\frac{dy}{dx} = x$, $(a, b) = (1,2)$
2) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}$, $(a, b) = (1,1)$
3) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $(a, b) = (4,1)$
4) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, $(a, b) = \left(e, \frac{1}{2}\right)$

**Opgave 2**

Bestem den løsning til differentialligningen, hvis graf går gennem $(x_0, y_0)$, når

a) $\frac{dy}{dx} = 3y$ og $(x_0, y_o) = (0,4)$
b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}y$ og $(x_0, y_0) = (\ln 4, 2)$
c) $\frac{dy}{dx} = 4^2 y$ og $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{4}, e^{-4}\right)$
d) $\frac{dy}{dx} = -2y$ og $(x_0, y_0) = (\ln 5, 1)$

**Opgave 3**

Bestem en forskrift for den partikulære løsning, hvis graf går gennem punktet $P$, når

a) $\frac{dy}{dx} - y = 0$, $P(0,-1)$
b) $\frac{dy}{dx} = 12 - 3y$, $P(0,7)$
c) $\frac{dy}{dx} = 2 + 4y$, $P(0,2)$
d) $\frac{dy}{dx} - 6 + 3 \cdot y = 0$, $P(0,10)$

## Opgave 4

En differentialligning er givet ved: $y' = 20 - 5y$.

a) Bestem den partikulære løsning $y = f(x)$ til differentialligningen, der opfylder at $f(0) = 6$.

## Opgave 5

Funktionerne $f$, $g$ og $h$ er løsninger til differentialligningen

$$y' = 3y - 12.$$

Bestem en forskrift for hver af dem, når

$$f(1) = 5, g(1) = 4 \text{ og } h(1) = 3.$$

## Opgave 6

En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x^2}$.

a) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen.

## Opgave 7

Om funktionen $f$, der er løsning til den logistiske ligning

$$\frac{dy}{dx} = y(b - ay),$$

gælder, at $f(0) = 1, f'(0) = 7$ og $f''(0) = 21$.

Bestem $a$ og $b$.

## Opgave 8

En differentialligning er givet ved: $x\frac{dy}{dx} - y = x^3$, $x > 0$.

a) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen.

b) Bestem den partikulære løsning, hvis graf går igennem punktet $P(1, 4)$.

**Opgave 9**

En differentialligning er givet ved: $2\frac{dy}{dx} = y + e^{\frac{1}{2}x}$.

a) Bestem ligningen for tangenten til grafen i punktet $P(0,1)$ for den partikulære løsning til differentialligningen, der indeholder punktet $P(0,1)$.

b) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen.

**Opgave 10**

En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = 5x^3,\ x > 0$.

a) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen.

b) Bestem en forskrift for den partikulære løsning, hvis graf går igennem punktet $P(2, 18)$.

**Opgave 11**

En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} = 0{,}02y(25 - y)$.

a) Bestem den partikulære løsning $y = f(x)$ til differentialligningen, hvis graf går igennem punktet $P(0{,}5)$.

b) Skitser grafen for $f$ og løs ligningen $f(x) = 8$.

**Opgave 12**

I et elektrisk kredsløb betegnes strømmen $I(t)$, hvor $I$ er strømmen målt i ampere, og $t$ er tiden målt i sekunder. Strømmen $I(t)$ er løsning til differentialligningen:

$$0{,}5 \cdot \frac{dI}{dt} + 5 \cdot I = 12.$$

Strømmen opfylder: $I(0) = 0$.

a) Bestem strømmen som funktion af tiden.

b) Bestem det tidspunkt, hvor strømmen er 0,7 ampere.

**Opgave 13**

En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx}+\cos(x)\cdot y=5\cos(x).$

a) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen.

En anden differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx}=y\cdot(x^2+4).$

b) Vis, at $y=f(x)=-2e^{\frac{1}{3}x^3+4x}$ er en løsning til denne differentialligning.

**Opgave 14**

En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx}+y=2\cdot e^{2x}+1.$

a) Vis, at funktionen $y=\frac{2}{3}e^{2x}+e^{-x}+1$ er en løsning til differentialligningen.

En anden differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx}+y=2\cdot e^{2x}.$

b) Bestem ved beregning den fuldstændige løsning til denne differentialligning.

En tredje differentialligning er givet ved $\frac{dy}{dx}+y=2\cdot e^{2x}+2.$

c) Bestem ved beregning ligningen for tangenten til grafen for den løsning, hvis graf går gennem punktet $P(0,1)$.

**Opgave 15**

En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx}+ky=e^{-x}$, hvor $k$ er et reelt tal.

a) Bestem $k$ således at $y=f(x)=-\frac{1}{3}e^{-x}$ er en løsning til differentialligningen.

En anden differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=3x,$ hvor $x>0.$

b) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen.

En partikulær løsning til differentialligningen indeholder punktet $P(1,b)$, og tangenten til grafen for denne løsning i punktet $P$ har hældningskoefficienten 5.

c) Bestem tallet $b$.