

Vektorer i planen

Hvis man ønsker mere udfordring, kan man springe de første 8 opgaver over.

Opgave 1

I planen er givet tre vektorer: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Angiv koordinaterne til hver af vektorerne

$$-\vec{a}, \quad 2\vec{a}\vec{b}, \quad 3\vec{b}, \quad \vec{a} + \vec{b}, \\ \vec{a} - \vec{b}, \quad 2\vec{a} + 3\vec{b}, \quad -3\vec{a} - 5\vec{b}.$$

b) Beregn tallene s og t , således at $s\vec{a} + t\vec{b} = -3\vec{c}$.

c) Angiv skalarprodukterne

$$\vec{a} \cdot \vec{b}, \quad \vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{a}), \quad \vec{a} \cdot (\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}).$$

d) Bestem

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}, \quad (\vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b}))\vec{b}, \quad (\vec{c} \cdot \vec{a})(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

Opgave 2

I planen er givet to vektorer \vec{a} og \vec{b} . Beregn vinklen mellem de to vektorer, når:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Opgave 3

Om to vektorer \vec{a} og \vec{b} oplyses, at $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ og vinklen mellem de to vektorer er 60° .

Beregn skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Opgave 4

I planen er givet to vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6s \\ s^2 - 4 \end{pmatrix}$.

Bestem s så vektorerne \vec{a} og \vec{b} er parallelle og ensrettede.

Opgave 5

I planen er givet to vektorer \vec{a} og \vec{b} .

- a) Beregn t så vektorerne så de to vektorer er ortogonale, når de er givet ved:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \sin(t) \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in [0; 2\pi].$$

- b) Bestem de værdier af tallet t således, at de to vektorer er ortogonale, når de er givet ved:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -2t \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Opgave 6

- a) En vektor i planen er givet ved: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. To punkter er givet ved:

$A(1, k)$ og $B(3, 2k + 1)$, hvor k er et reelt tal.

Beregn k således, at vektoren \overrightarrow{AB} er vinkelret på vektoren \vec{a} .

- b) I planen er givet punkterne $A(2, -1)$, $B(4, 3)$, $C(6, 4)$ og $D(3, k)$.

Bestem k således at vektor \overrightarrow{CD} er parallel med vektor \overrightarrow{AB} .

Opgave 7

- a) Bestem arealet af det parallelogram der udspændes af vektorerne

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- b) Bestem derefter k , så parallelogrammets areal bliver 8, når

3) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} k \\ 4 \end{pmatrix}$.

4) $\vec{a} = \begin{pmatrix} k^2 \\ k \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Opgave 8

I planen er en trekant ABC bestemt ved $A(-2, 3)$, $B(2, 1)$ og $C(4, 6)$.

Bestem arealet af trekant ABC .

Opgave 9

I planen er givet to vektorer \vec{a} og \vec{b} . Beregn projektionen af \vec{b} på \vec{a} og, når:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Opgave 10

I planen er givet to vektorer \vec{a} og \vec{b} . Beregn projektionen af \vec{a} på \vec{b} , når:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \end{pmatrix}$

Opgave 11

To vektorer er givet ved: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$, hvor k er et tal.

- Bestem tallet k , så $\vec{a} \perp \vec{b}$ og bestem tallet k så $\vec{a} \parallel \vec{b}$.
- Bestem tallet k , så arealet af den trekant de to vektorer udspænder, bliver 5.

Opgave 12

To vektorer i planen er bestemt ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} t+2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}$.

- Bestem for $t = 1$ projektionen af \vec{a} på \vec{b} .
- Bestem for $t = 1$ vinklen mellem \vec{a} og \vec{b} .
- Bestem de værdier af t , hvor \vec{a} er ortogonal på \vec{b} .

Opgave 13

I et koordinatsystem er to vektorer \vec{a} og \vec{b} bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} t^2 + 2t \\ 3 + t \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2t + 1 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

- Beregn for $t = 2$ vinklen mellem \vec{a} og \vec{b} .
- Beregn for $t = 3$ projektionen af \vec{a} på \vec{b} .
- Beregn de værdier af t , for hvilke \vec{a} og \vec{b} er parallelle.

Opgave 14

To vektorer i planen er bestemt ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} t-1 \\ t+1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ t+1 \end{pmatrix}$.

- Bestem for $t = 3$ arealet af det parallelogram, som udspændes af \vec{a} og \vec{b} ,
- Bestem de værdier af t , for hvilket \vec{a} er ortogonal på \vec{b} .
- Bestem for $t = 2$ ligningen for den linje, som går igennem punktet $P(3, 4)$, og som er parallel med vektor \vec{a} .

Opgave 15

I et koordinatsystem er to vektorer \vec{a} og \vec{b} bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} t-4 \\ t \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t \end{pmatrix}, \text{ hvor } t \text{ er et reelt tal.}$$

- Bestem for $t = -2$ arealet af det parallelogram, der udspændes af vektorerne \vec{a} og \vec{b} .
- Bestem for $t = 2$ koordinatsættet til projektionen af \vec{a} på \vec{b} .
- Bestem de værdier af t , for hvilke vinklen mellem \vec{a} og \vec{b} er 90° .

Opgave 16

Om vektorerne \vec{a} og \vec{b} oplyses, at: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 6$ og $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$.

- Vis, at vinklen mellem vektorerne \vec{a} og \vec{b} er 60° .
- Beregn arealet af den trekant, som udspændes af \vec{a} og \vec{b} .
- Bestem konstanten t således, at $|t \cdot \vec{a}| + |\vec{b}| = 30$.

Opgave 17

Tre punkter er givet ved: $A(1, 2)$, $B(4, 3)$ og $C(3, 0)$.

En trekant ABC udspændes af de tre punkter.

- Beregn vinkel A i trekanten.
- Beregn trekantens areal.
- Beregn koordinatsættet til projektionen af vektor \overrightarrow{AB} på vektor \overrightarrow{AC} .