# Vektorer i planen

**Hvis man ønsker mere udfordring, kan man springe de første 8 opgaver over.**

**Opgave 1**

I planen er givet tre vektorer: $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ og $\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

a) Angiv resultaterne til hver af vektorerne

$-\vec{a}$, $\quad 2\vec{a}\,\vec{b}$, $\quad 3\vec{b}$, $\quad \vec{a}+\vec{b}$,

$\vec{a}-\vec{b}$, $\quad 2\vec{a}+3\vec{b}$, $\quad -3\vec{a}-5\vec{b}$.

b) Beregn tallene $s$ og $t$, således at $s\vec{a}+t\vec{b}=-3\vec{c}$.

c) Angiv skalarprodukterne

$\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\quad \vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})$, $\quad \vec{a}\cdot(\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c})$.

d) Bestem

$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}$, $\quad (\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b}))\vec{b}$, $\quad (\vec{c}\cdot\vec{a})(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.

**Opgave 2**

I planen er givet to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Beregn vinklen mellem de to vektorer, når:

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$.

**Opgave 3**

Om to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ oplyses, at $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ og vinklen mellem de to vektorer er $60°$.

Beregn skalarproduktet $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

**Opgave 4**

I planen er givet to vektorer $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}6s\\s^2-4\end{pmatrix}$.

Bestem $s$ så vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle og ensrettede.

## Opgave 5

I planen er givet to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

a) Beregn $t$ så vektorerne så de to vektorer er ortogonale, når de er givet ved:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}4\sin(t)\\3\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\quad t\in[0;2\pi].$$

b) Bestem de værdier af tallet $t$ således, at de to vektorer er ortogonale, når de er givet ved:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix} \text{ og } \vec{b}=\begin{pmatrix}-2t\\8\end{pmatrix}.$$

## Opgave 6

a) En vektor i planen er givet ved: $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$. To punkter er givet ved:

$A(1,k)$ og $B(3,2k+1)$, hvor $k$ er et reelt tal.

Beregn $k$ således, at vektoren $\overrightarrow{AB}$ er vinkelret på vektoren $\vec{a}$.

b) I planen er givet punkterne $A(2,\ -1)$, $B(4,\ 3)$, $C(6,\ 4)$ og $D(3,\ k)$.

Bestem $k$ således at vektor $\overrightarrow{CD}$ er parallel med vektor $\overrightarrow{AB}$.

## Opgave 7

a) Bestem arealet af det parallelogram der udspændes af vektorerne

1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$.

2) $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$.

b) Bestem derefter $k$, så parallelogrammmets areal bliver $8$, når

3) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}k\\4\end{pmatrix}$.

4) $\vec{a}=\begin{pmatrix}k^2\\k\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

## Opgave 8

I planen er en trekant $ABC$ bestemt ved $A(-2,3)$, $B(2,1)$ og $C(4,6)$.

Bestem arealet af trekant $ABC$.

**Opgave 9**

I planen er givet to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Beregn projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$ og, når:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

**Opgave 10**

I planen er givet to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Beregn projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$, når:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \end{pmatrix}$

**Opgave 11**

To vektorer er givet ved: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$, hvor *k* er et tal.

a) Bestem tallet $k$, så $\vec{a} \perp \vec{b}$ og bestem tallet $k$ så $\vec{a} \parallel \vec{b}$.
b) Bestem tallet $k$, så arealet af den trekant de to vektorer udspænder, bliver 5.

**Opgave 12**

To vektorer i planen er bestemt ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} t+2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}$.

a) Bestem for $t = 1$ projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.
b) Bestem for $t = 1$ vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.
c) Bestem de værdier af $t$, hvor $\vec{a}$ er ortogonal på $\vec{b}$.

**Opgave 13**

I et koordinatsystem er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} t^2 + 2t \\ 3 + t \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

a) Beregn for $t = 2$ vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.
b) Beregn for $t = 3$ projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.
c) Beregn de værdier af $t$, for hvilke $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle.

## Opgave 14

To vektorer i planen er bestemt ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} t-1 \\ t+1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ t+1 \end{pmatrix}$.

a) Bestem for $t = 3$ arealet af det parallelogram, som udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$,

b) Bestem de værdier af $t$, for hvilket $\vec{a}$ er ortogonal på $\vec{b}$.

c) Bestem for $t = 2$ ligningen for den linje, som går igennem punktet $P(3, 4)$, og som er parallel med vektor $\vec{a}$.

## Opgave 15

I et koordinatsystem er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ bestemt ved

$\vec{a} = \begin{pmatrix} t-4 \\ t \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t \end{pmatrix}$, hvor $t$ er et reelt tal.

a) Bestem for $t = -2$ arealet af det parallelogram, der udspændes af vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

b) Bestem for $t = 2$ koordinatsættet til projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

c) Bestem de værdier af $t$, for hvilke vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $90°$.

## Opgave 16

Om vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ oplyses, at: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 6$ og $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$.

a) Vis, at vinklen mellem vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $60°$.

b) Beregn arealet af den trekant, som udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

c) Bestem konstanten $t$ således, at $|t \cdot \vec{a}| + |\vec{b}| = 30$.

## Opgave 17

Tre punkter er givet ved: $A(1,2), B(4,3)$ og $C(3,0)$.

En trekant $ABC$ udspændes af de tre punkter.

a) Beregn vinkel $A$ i trekanten.

b) Beregn trekantens areal.

c) Beregn koordinatsættet til projektionen af vektor $\overrightarrow{AB}$ på vektor $\overrightarrow{AC}$.

## Facit

Opgave 1

a) $-\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\quad 2\vec{a}\,\vec{b} = -4$, $\quad 3\vec{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$,

$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad 2\vec{a} + 3\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \end{pmatrix}$, $\quad -3\vec{a} - 5\vec{b} = \begin{pmatrix} -19 \\ -22 \end{pmatrix}$.

b) $t = -1$ og $s = 2$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$, $\quad \vec{b} \cdot \left(\vec{c} - \vec{a}\right) = 13$, $\quad \vec{a} \cdot \left(\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}\right) = 28$.

d) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\quad \left(\vec{b} \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right)\right)\vec{b} = \begin{pmatrix} -155 \\ -62 \end{pmatrix}$,

$\left(\vec{c} \cdot \vec{a}\right)\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = \begin{pmatrix} -84 \\ -56 \end{pmatrix}$.

––––––––––––––––––––––––––––––––––

Opgave 2

a) 30° $\qquad$ b) 90°

––––––––––––––––––––––––––––––––––

Opgave 3

a) 3

––––––––––––––––––––––––––––––––––

Opgave 4

a) $s = 4$

Opgave 5

a) $\mathrm{t} \approx 22°$ *eller* $t \approx 0.38\mathrm{rad}$ b) $L = \{-2; 2\}$

––––––––––––––––––––––––––––––––––

Opgave 6

a) $k = -2$ $\qquad$ b) $k = -2$

––––––––––––––––––––––––––––––––––

Opgave 7

1) $26$ 2) $62$ 3) $L = \{2; 10\}$ 4) $L = \left\{-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right\}$,

---

Opgave 8

a) $12$

---

Opgave 9

a) $\begin{pmatrix} \frac{24}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$ b) $-\frac{14}{29}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

---

Opgave 10

a) $\frac{12}{29}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $-\frac{19}{106}\begin{pmatrix} -5 \\ -9 \end{pmatrix}$

---

Opgave 11

a) $k = \frac{8}{3}$ b) $L = \left\{1; \frac{13}{3}\right\}$

---

Opgave 12

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $45°$ c) $L = \left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}; \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

---

Opgave 13

a) $50{,}61°$ b) $\frac{129}{65}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $L = \left\{-\frac{3}{2}; 1\right\}$

---

Opgave 14

a) $6$ b) $L = \{-3; 0\}$ c) $-3x + y + 5 = 0$

---

Opgave 15

a) 38 b) $\begin{pmatrix} \frac{10}{37} \\ \frac{60}{37} \end{pmatrix}$ c) $L = \left\{-\frac{4}{3}; 1\right\}$

---

Opgave 16

a) $60°$ b) $3\sqrt{3}$ c) $t = 12$

---

Opgave 17

a) 63,43 b) 4 c) $\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$