

# Plangeometri

---

Hvis man ønsker mere udfordring, kan man springe de første 10 opgaver over.

## Opgave 1

To linjer er givet ved ligningerne:

$$2x - y + 2 = 0 \text{ og } x + b \cdot y + 4 = 0, \text{ hvor } b \text{ er en konstant.}$$

- a) Beregn konstanten  $b$  således, at de to linjer bliver ortogonale.

## Opgave 2

En ret linje er givet ved parameterfremstillingen:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in R$

- a) Angiv linjen på formen:  $y = ax + b$

## Opgave 3

- a) En vektor er givet ved:  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , og et punkt er givet ved:  $P(2, -1)$ .

Bestem en ligning for den linje, der går igennem punktet  $P$  og har vektoren  $\vec{v}$  som normalvektor.

- b) I planen er givet et punkt,  $P(3, 5)$  og en vektor,  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

Bestem en ligning for linjen  $l$ , der har  $\vec{a}$  som en normalvektor, og som går gennem  $P$ .

## Opgave 4

En vektor er givet ved:  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ , og et punkt er givet ved:  $P_0(4, 1)$ .

Bestem en ligning for den linje, der har vektor  $\vec{r}$  som retningsvektor og indeholder punktet  $P_0$ .

### Opgave 5

- a) En linje  $l$  i planen er bestemt ved ligningen  $6x + 8y - 4 = 0$ . Endvidere er der givet punktet  $P(4,5)$ . Bestem afstanden fra punktet  $P$  til linjen  $l$ .
- b) Bestem afstanden mellem linjen  $l: x + y - 2 = 0$  og punktet  $P(-2,1)$ .
- c) To linjer  $l$  og  $m$  er givet ved:  $l: y = 3x + 4$ ,  $m: y = 3x - 12$ . Bestem afstanden mellem linjerne  $l$  og  $m$ .

### Opgave 6

Bestem cirkelns radius og koordinaterne til dens centrum, når:

- a) En cirkel er givet ved ligningen  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 23 = 0$ .
- b) En cirkel er givet ved ligningen:  $x^2 - 4x + y^2 = 5$ .

### Opgave 7

En cirkel er givet ved ligningen:  $x^2 + 4x + y^2 - 8y = 5$

- a) Bestem cirkelns radius og koordinaterne til cirkelns centrum.
- b) Beregn koordinaterne til cirkelns skæringspunkter med  $x$ -aksen.

### Opgave 8

En cirkel er givet ved ligningen:  $x^2 + y^2 - 4y = 5$ .

- a) Bestem cirkelns radius og koordinatsættet til cirkelns centrum.
- b) Beregn koordinatsættene til cirkelns skæringspunkter med  $y$ -aksen.

### Opgave 9

En ligning er givet ved:  $x^2 + y^2 - 2k \cdot x + 6y - 12 = 0$ , hvor  $k$  er et tal.

Bestem  $k$  således, at ligningen fremstiller en cirkel med radius  $r = 5$ .

### Opgave 10

En cirkel har centrum i punktet  $C(-2,1)$  og radius  $r = 5$ .

En linje  $l$  er givet ved:  $3x + 4y - 6 = 0$

- a) Beregn afstanden mellem punktet  $C$  og linjen  $l$ .
- b) Undersøg om linjen  $l$  skærer cirklen.

### Opgave 11

- a) I planen er givet cirklen:  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$  samt punktet  $P(5, 1)$  som ligger på cirklen.  
Bestem en ligning for tangenten til cirklen gennem punktet  $P$ .
- b) En cirkel er givet ved:  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$ ,  
og en linje er givet ved:  $4x - 3y - 15 = 0$ .  
Vis, at linjen er tangent til cirklen.

### Opgave 12

To linjer er givet ved:  $l: y = -3x + 4$  og  $m: 2x - y - 3 = 0$ .  
Et punkt er givet ved:  $P(3, -2)$ .

- a) Beregn den spidse vinkel mellem  $l$  og  $m$ .  
b) Beregn afstanden mellem  $P$  og  $m$ .

### Opgave 13

En cirkel er givet ved, at den har centrum i  $C(2, -3)$  og at den tangerer en linje, der er givet ved:  $4x - 3y + 8 = 0$ .

- a) Bestem en ligning for cirklen.  
b) Bestem koordinaterne til skæringspunkterne mellem cirklen og  $x$ -aksen.

### Opgave 14

I planen er to linjer  $l$  og  $m$  bestemt ved ligningerne

$$l: 2x - 3y + 6 = 0 \text{ og } m: 4x - 5y + 20 = 0.$$

- a) Bestem den spidse vinkel mellem linjerne  $l$  og  $m$ .  
b) Bestem koordinaterne til skæringspunktet mellem linjerne  $l$  og  $m$ .

### Opgave 15

To cirkler er givet ved ligningerne:

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 16 \text{ og } (x-10)^2 + (y-1)^2 - 36 = 0.$$

- a) Bestem en ligning for den linje, der går gennem de to cirklers centre.  
b) Bestem koordinatsættet til røringspunktet mellem de to cirkler.

### Opgave 16

En ligning er givet ved:  $x^2 + 4x + y^2 - k \cdot y = 8$ , hvor  $k$  er en konstant.

- Bestem  $k$  således, at ligningen fremstiller en cirkel med centrum  $C(-2,1)$ .
- Bestem cirkelns radius for  $k = 2$ .

### Opgave 17

En cirkel  $C$  er givet ved  $(x-1)^2 + y^2 = 5$  og en linje  $l$  er givet ved  $y = 2x + 1$ .

- Bestem afstanden fra centrum af cirklen  $C$  til linjen  $l$ .
- Bestem koordinatsættene til skæringspunkterne mellem cirklen  $C$  og linjen  $l$ .
- Bestem en ligning for tangenten til cirklen  $C$  i punktet  $P(3, 1)$ .

### Opgave 18

En linje  $l$  er givet ved:  $5x + 3y = 6$ .

- Bestem afstanden mellem linjen  $l$  og punktet  $P(1,2)$ .
- Bestem en ligning for den linje  $m$ , der er ortogonal på linjen  $l$  og går igennem punktet  $P(1,2)$ .
- Bestem den spidse vinkel mellem linje  $l$  og  $y$ -aksen.

### Opgave 19

I et koordinatsystem er punkterne  $A(1, -1)$  og  $B(-1,3)$  givet.

Den rette linje  $l$  er givet ved ligningen  $y = -x + 5$ .

- Bestem vinklen mellem de to stedvektorer til punkterne  $A$  og  $B$ .
- Bestem ligningen for den linje  $m$ , der skærer linje  $l$  i det punkt hvor  $x = 2$ , og som har  $\overrightarrow{AB}$  som normalvektor.
- Bestem koordinaterne til punkt  $P$  i 1.kvadrant på linjen  $l$ , således at arealet af trekant  $ABP$  er 5.

### Opgave 20

I et koordinatsystem i planen er givet tre punkter:  $O(0,0)$ ,  $A(5,-3)$  og  $B(-3,-1)$ .

- Bestem vinklen mellem stedvektorerne til punkterne  $A$  og  $B$ .
- Bestem ligningen for den linje gennem  $A$ , der er parallel med linjen med ligningen  $x - 2y + 1 = 0$ .

Et punkt  $P$  ligger i første kvadrant på parablen med ligningen  $f(x) = x^2$ .

- Bestem koordinatsættet til punktet  $P$  således at, arealet af den trekant, der udspændes af stedvektorerne  $\overrightarrow{OA}$  og  $\overrightarrow{OP}$ , får arealet  $T = 13$ .

### Opgave 21

En ret linje  $l$  er givet ved:  $y = 2x + 6$

En parabel er givet ved:  $y = -x^2 + 4x - 2$

- Bestem en ligning for den cirkel, der har centrum i parablens toppunkt, og som har linjen  $l$  som tangent.
- Bestem koordinaterne til det punkt på parablen, som har mindst afstand til linjen  $l$ .

### Opgave 22

I planen er givet punkterne  $A(2, 1)$  og  $B(0, 3)$ , vektoren  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  og linjen

$l: y = 2x + 1$ .

- Bestem en ligning for den rette linje  $m$ , som indeholder punktet  $B$  og har vektoren  $\vec{v}$  som normalvektor.
- Beregn den spidse vinkel mellem linjen  $l$  og vektoren  $\overrightarrow{AB}$ .
- Bestem koordinaterne til de punkter på  $x$ -aksen, hvor afstanden til linjen  $l$  er  $\sqrt{5}$ .
- Bestem koordinaterne til vektoren  $\vec{v}_y$ , som fremkommer ved at projicere vektor  $\vec{v}$  på  $y$ -aksen.

---

## Facit

Opgave 1

a)  $b = 2$

-----

Opgave 2

a)  $y = 2x + 1$

-----

Opgave 3

a)  $2x + y - 3 = 0$       b)  $x + 4y - 23 = 0$

-----

Opgave 4

a)  $-5x + 2y + 18 = 0$

Opgave 5

a) 6      b)  $\frac{3}{\sqrt{2}}$       c)  $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

-----

Opgave 6

a)  $C(2, -3)$  og  $r = 6$       b)  $C(2, 0)$  og  $r = 3$

-----

Opgave 7

a)  $C(-2, 4)$  og  $r = 5$       b)  $(x, y) = (1, 0)$  og  $(x, y) = (-5, 0)$

-----

Opgave 8

a)  $C(0,2)$  og  $r = 3$       b)  $(x,y) = (0,-1)$  og  $(x,y) = (0,5)$

---

Opgave 9

a)  $L = \{-2; 2\}$

---

Opgave 10

a)  $\frac{8}{5}$       b) Hint: se  $\text{dist}(C, l)$

---

Opgave 11

a)  $4x + 3y - 23 = 0$       b) Hint: se  $\text{dist}(C, l)$

---

Opgave 12

a)  $45^\circ$       b)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

---

Opgave 13

a)  $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$       b)  $(x,y) = (6,0)$

---

Opgave 14

a)  $4,97^\circ$       b)  $(x,y) = (-15,-8)$

---

Opgave 15

a)  $-6x + 8y + 52 = 0$       b)  $(x,y) = \left(\frac{26}{5}, -\frac{13}{5}\right)$

---

Opgave 16

a)  $k = 1$       b)  $r = 4$

---

Opgave 17

a)  $a = \frac{3\sqrt{5}}{5}$       b)  $(x, y) = (1, 3)$       c)  $2x + y - 7 = 0$

-----

Opgave 18

a)  $\frac{5}{\sqrt{34}}$     b)  $-3x + 5y - 7 = 0$     c)  $30,96^\circ$

-----

Opgave 19

a)  $153,4^\circ$     b)  $-2x + 5y - 11 = 0$     c)  $P(1, 5)$

-----

Opgave 20

a)  $130,6^\circ$     b)  $x - 2y - 11 = 0$     c)  $P(2, 4)$

-----

Opgave 21

a)  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = \frac{64}{5}$     b)  $(x, y) = (1, 1)$

-----

Opgave 22

a)  $x - y + 3 = 0$       b)  $71,57^\circ$   
c)  $(x, y) = (-3, 0)$  og  $(x, y) = (2, 0)$       d)  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$