Vektorer i rummet

Hvis man ønsker mere udfordring, kan man springe de første 8 opgaver over.

Opgave 1

Punkterne A, B, C og D har koordinaterne

$$A(-1{,}0{,}4), B(3{,}7{,}1), C(6,-1{,}0), D(1{,}4,-5).$$

Bestem koordinaterne til vektorerne $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}$.

Opgave 2

Angiv koordinaterne til B, når $A(1,-2{,}3)$ og $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Opgave 3

Angiv koordinaterne til midtpunkterne af siderne i ΔABC, når

1) $A(-2{,}4{,}6)$, $B(6,-2,-4)$, $C(2{,}6{,}4)$
2) $A(8,-4{,}5)$, $B(-4{,}6{,}1)$, $C(0{,}2,-3)$

Opgave 4

Linjestykket AB er delt i tre lige lange stykker af punkterne S og T. Angiv stedvektorerne $\overrightarrow{OS}$ og $\overrightarrow{OT}$ udtrykt ved $\overrightarrow{OA}$ og $\overrightarrow{OB}$, og angiv derefter koordinaterne ti S og T, når

1) $A(9{,}6{,}3)$, $B(3,-3{,}0)$
2) $A(5{,}3{,}4)$, $B(2{,}6{,}5)$
3) $A(a, 2a, -a)$, $B(4a, -a, 5a)$
4) $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$

Opgave 5

Angiv skalarprodukterne $\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{a} \cdot \vec{c}$ og $\vec{b} \cdot \vec{c}$, når

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$
2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Løs derefter følgende ligninger

3) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ z \end{pmatrix} = -6$

4) $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \end{pmatrix} = 6$

Opgave 6

Beregn længden af følgende vektorer:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}, \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Opgave 7

Bestem tallet t, så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ bliver ortogonale, når

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Undersøg, om der findes værdier af t, der gør $\vec{a}$ og $\vec{b}$ parallelle.

Bestem endelig t og k, så $\vec{a}$ og $\overrightarrow{kb}$ bliver enhedsvektorer.

Opgave 8

Bestem vinklen mellem vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$, når

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 21 \end{pmatrix}$

3) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

4) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Opgave 9

Beregn vektorproduktet: $\vec{a} \times \vec{b}$, når

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

4) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Opgave 10

Bestem de reelle tal k, for hvilke $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle, hhv. ortogonale, når

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} k-1 \\ k \\ k+1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -k \\ 2k \\ -k \end{pmatrix}$

2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3k \\ k-7 \\ 2k-1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10-k \\ 2k-9\frac{1}{2} \\ k-\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Opgave 11

a) ΔABC er udspændt af punkterne $A(3,4,7), B(1,6,1), C(2,3,8)$.

Beregn hver af trekantens vinkler.

b) Bestem koordinaterne til punktet D således, at $ABCD$ er et parallelogram, når $A(2,-3.7), B(-8,2,6)$ og $C(0,1,0)$.

Bestem derefter parallelogrammets vinkler.

Opgave 12

I et koordinatsystem er givet vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Angiv projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

b) Angiv projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{c}$.

c) Angiv projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{c}$, og giv en geometrisk fortolkning af dette resultat.

Opgave 13

I et koordinatsystem er givet punkterne

$$A(1,-2,5), B(0,1,2), C(3,-1,1), D(2,3,4).$$

Bestem længden af projektionen af $\overrightarrow{AB}$ på $\overrightarrow{CD}$.

Opgave 14

Angiv en vektor, der er ortogonal på $\vec{a}$ og $\vec{b}$, når

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Opgave 15

Beregn arealet af den trekant, der udspændes af:

1) Vektorerne $\vec{a} = (1,2,3)$ og $\vec{b} = (-1,1,3)$.

2) Punkterne $A(1,1,2)$, $B(-1,2,3)$ og $C(3,-1,2)$.

Opgave 16

Om vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$, oplyses, at

$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = 7$, $\left|\vec{a}\right| = 5$ og $v = 30°$,

hvor v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Bestem $\left|\vec{b}\right|$.

Opgave 17

To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}_k$ er givet ved: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b}_k = \begin{pmatrix} k \\ k+2 \\ k+6 \end{pmatrix}$, hvor k er en konstant.

a) Bestem konstanten k, så vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}_k$ er parallelle.

b) Bestem vinklen mellem vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}_k$ for $k = 1$.