Rumgeometri

Hvis man ønsker mere udfordring, kan man springe de første 10 opgaver over.

Opgave 1

I rummet er givet punkterne A og B**.** Bestem en parameterfremstilling for linjen l som indeholder punkterne A og B, når

1) $A(1,\ -2\ ,\ 2)$ og $B(-1,\ 1,\ 1)$.
2) $A(0,-1,3)$ og $B(2,1,5)$.
3) **3)** $A(2,5,-1)$ og $B(1,-3,6)$**.**

Opgave 2

Bestem en parameterfremstilling for hver af linjerne l og m, når l går gennem punkterne $A(2,-4{,}7)$ og $B(-3{,}6{,}2)$, mens m går gennem punktet $C(2{,}3{,}4)$ og er parallel med $\vec{a}=(-1{,}4{,}7)$.

Vis, at l og m ikke er parallelle.

Opgave 3

Undersøg, om linjerne m_1 og m_2 skærer hinanden, er parallelle eller er vindskæve.

Hvis de skærer hinanden, skal skæringspunktets koordinater bestemmes.

1) m_1: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 8\frac{1}{2} \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, m_2: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 13 \\ -5\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$

2) m_1: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, m_2: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Opgave 4

Linjerne m_1 og m_2 har parameterfremstillingerne

$$m_1: (x,y,z) = (t+3, t+1{,}2t-4)$$
$$m_2: (x,y,z) = (t-2{,}3t+4, -2t+1).$$

Undersøg, om linjerne skærer hinanden, er parallelle eller er vindskæve.

Opgave 5

En plan α indeholder punktet $P(2,1,5)$ og linjen l står vinkelret på planen

α. Linjen l er givet ved $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in R$.

a) Bestem en ligning for planen α.

Opgave 6

Bestem en ligning for den plan, der har vektor $\vec{n}$ som normalvektor og indeholder punktet P_0, når

1) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, og $P_0(1,2,1)$

2) $\vec{n} = (1,-3,2)$ og $P_0(3,1,7)$

3) $\vec{n} = (1,0,-1)$ og $P_0(2,-1,-1)$

4) $\vec{n} = (0,0,4)$ og $P_0(3,0,0)$.

Gør rede for, hvordan planerne i 3) og 4) ligger i koordinatsystemet.

Opgave 7

Angiv en ligning for planen P, Q og R, når

1) $P(1,0,1)$, $Q(2,-1,2)$, $R(1,1,1)$
2) $P(2,3,1)$, $Q(5,-4,0)$, $R(3,2,1)$.

Opgave 8

En vektor er givet ved: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En ret linje er givet ved: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 2k \end{pmatrix}$, $t \in R$.

a) Beregn konstanten k således, at linjen er vinkelret på vektor $\vec{a}$.

Opgave 9

Bestem afstanden fra punktet A til planen α, når

1) α: $4x+3y-z+4=0$ og $A(2,-1,5)$
2) α: $13x-y-10z=22$ og $A(3,-2,6)$
3) α: $3x+y-4z=1$ og $A(3,-2,6)$

Opgave 10

a) En plan er givet ved: $2x-y+6z=3$.

   Bestem koordinatsættet til planens skæringspunkt med z-aksen.

b) En linje er givet ved: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in R$.

   Beregn koordinatsættet til linjens skæringspunkt med xy-planen.

Opgave 11

I rummet er givet en plan α og en linje *l*. Bestem skæringspunktet mellem planen α og linjen *l*, når

1) l: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R$ og α: $x+2y-z+3=0$
2) l: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in R$ og α: $2x-y+z-4=0$.

Opgave 12

a) Planerne α_1 og α_2 er givet ved
   α_1: $2x-y+2z=11$ og α_2: $3(x-1)-(y-3)+2(z-3)=0$.
   Vis, at planerne er parallelle og find afstanden mellem dem.
b) Beregn den spidse vinkel mellem planerne α_1 og α_2 med ligningerne
   α_1: $x-3y+z=4$ og α_2: $2x+y-4z=-1$.

Opgave 13

En vektor er givet ved: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ og et punkt er givet ved: $P_1(1,-2,1)$

En linje l er givet ved: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in R$

a) Bestem en ligning for den plan α, der har vektoren $\vec{n}$ som normalvektor og som indeholder punktet $P_1(1,-2,1)$.

b) Beregn den spidse vinkel mellem linjen l og planen α.

Opgave 14

Bestem koordinatsættet til centrum C og radius r for de kugler, hvis ligninger er:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4 = 0$.

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y - 11 = 0$.

Opgave 15

a) En kugle er givet ved ligningen: $(x-4)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 10$.

Bestem koordinatsættene til skæringspunkterne med x-aksen.

b) En kugle har centrum i $(2,3,4)$ og radius 6.

Opstil en ligning for kuglen og angiv koordinaterne til kuglens skæringspunkter med akserne.

Opgave 16

En kugle er givet ved ligningen: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 18$

Et punkt er givet ved: $P(2,0,1)$

a) Vis at punktet P er et punkt på kuglen.

b) Bestem en ligning for kuglens tangentplan i punktet P.

Opgave 17

En kugle er givet ved ligningen: $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=36$,

og en plan er givet ved ligningen: $2x-y-2z-13=0$.

Et punkt er givet ved: $A(1,k,-2)$, hvor k er en konstant.

a) Bestem konstanten k, således at A bliver et punkt på kuglen.

b) Undersøg om planen er tangentplan til kuglen.

Opgave 18

Der er givet to punkter $P_0(2,-1,3)$ og $Q(1,3,4)$ samt en vektor $\vec{r}=\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$

En ret linje *l* indeholder punktet P_0 og har vektoren $\vec{r}$ som retningsvektor.

a) Beregn afstanden mellem linjen l og punktet Q.

b) Beregn koordinaterne til skæringspunktet mellem linjen l og xy-planen.

Opgave 19

En linje er givet ved: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}, t\in R$.

a) Bestem koordinatsættet til linjens skæringspunkt med xy-planen.

b) Beregn afstanden mellem punktet $P(1,2,4)$ og linjen.

c) Bestem en parameterfremstilling for linjens projektion på xy-planen.

Opgave 20

I rummet er følgende givet: En plan $\alpha: 8x+5y-3z=10$, samt punkterne: $A(0,3,4)$, $B(-1,5,3)$ og $C(k,4,5)$.

a) Bestem en parameterfremstilling for den linje l, der er vinkelret på planen α og som indeholder punktet A.

b) Bestem afstanden mellem punktet B og linjen l.

c) Bestem værdierne af tallet k således, at den trekant som punkterne A, B og C udspænder, får arealet $T=\frac{1}{2}\sqrt{50}$.

Opgave 21

I rummet er følgende givet: Et punkt $A(4, 0, 3)$, en plan α med ligningen $3x + 2y - 4z + 12 = 0$, samt en linje l med parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in R$.

a) Bestem afstanden fra punktet A til planen α.

b) Bestem afstanden fra punktet A til linjen l.

c) Bestem den spidse vinkel mellem linjen l og planen α.

d) Bestem projektionen af retningsvektoren for linjen l på planen α.

En plan β indeholder punktet A og er parallel med linjen l og står vinkelret på planen α.

e) Bestem en ligning for planen β.

Opgave 22

I et koordinatsystem i rummet er planerne α og β givet ved ligningerne

$$\alpha : 3x - 2y - 5 = 0, \qquad \beta : -x + 2y - 2z = -1.$$

Desuden er der givet en kugle K med centrum $C(-2,1,1)$ og radius $r = 4$ samt en linje l med parameterfremstilling $l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad t \in R$.

a) Bestem en ligning for kuglen K.

b) Afgør med begrundelse om β er tangentplan til kuglen K.

c) Bestem en ligning for den plan, som indeholder linjen l og punktet $P(1,3,4)$.

d) Bestem punktet C's projektion på planen α.

e) Bestem arealet af trekant ABC, hvor A er punkt på l for $t = -2$ og B er punkt på l for $t = 2$.