Opsamling

Hvis man ønsker mere udfordring, kan man springe den første opgave af hvert emne over.

1. Brøkregning, parentesregneregler, kvadratsætningerne, potensregneregler og reduktion

Opgave 1

Udregn nedenstående tal i hånden:

$$\frac{3}{7}\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right), \qquad \left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{6},$$

$$\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}, \qquad \sqrt{\frac{1}{10^4}}.$$

Opgave 2

Reducér følgende udtryk mest muligt:

$$\frac{b^2-a^2}{a^2-b^2}+\frac{2a}{a-b}, \qquad \frac{x^2-4x+4}{x^2-4} \qquad \frac{\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^2\cdot\frac{a}{b^2}}{a^5}.$$

$$2(x-y)^2-2x(x-y) \qquad \frac{16^2+4y^2+16xy}{2x+y} \qquad \frac{a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{-2}\cdot\sqrt{a^3}}{\sqrt[4]{a^5}\cdot a^{-\frac{1}{2}}}$$

2. Ligninger og uligheder

Opgave 1

a) En funktion f er givet ved: $f(x)=\frac{x-2}{x+3}$.

Løs ligningen $f(x)=2$.

b) Løs uligheden $x^2+3x-6<3(x-2)$

c) Løs følgende ligninger

1) $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$.

2) $2x^2+5x=3x$

Opgave 2

Løs ved hjælp af lige store koefficienters metode ligningssystemerne

1) $x+\frac{1}{2}y=3$
$2x-3y=-2$

2) $2x-3y=3$
$3x+y=10$

3. Funktioner: Den rette linje, definitionsmængde, værdimængde, sammensatte funktioner, inverse funktioner, andengradspolynomiet, eksponentialfunktioner, eksponentielle udviklinger og logaritmer.

Opgave 1

En ret linje l går gennem punktet $P(2,3)$ og er vinkelret på linjen m givet ved: $m: y=-2x-1$

Beregn ligningen for linjen l.

Opgave 2

To funktioner *f* og *g* er givet ved: $f(x)=\ln(x+2)$ og $g(x)=x^2-3x$.

a) Bestem værdimængden for funktionen g.

b) Bestem definitionsmængden for den sammensatte funktion $f(g(x))=(f\circ g)(x)$.

Opgave 3

En funktion *f* er givet ved: $f(x)=\sqrt{5x-3}$, og en linjen l er givet ved: $3y-x=3$.

a) Bestem definitionsmængden for funktionen *f*.

b) Bestem en forskrift for den inverse funktion f^{-1} til funktionen *f*.

Opgave 4

Et andengradspolynomium *f* er givet ved: $f(x)=-2x^2-2x+4$.

a) Bestem koordinatsættene til de punkter, hvor grafen for *f* skærer koordinatakserne.

b) Bestem koordinatsættet til toppunktet for parablen, givet ved grafen for *f*.

c) Bestem værdimængden for funktionen *f*.

Opgave 5

a) En funktion f er givet ved $f(x)=b\cdot a^x, a,b>0$. Der gælder, at $f(1)=\frac{5}{2}$ og $f(3)=10$. Beregn a og b.

b) En eksponentiel udvikling er givet ved: $f(x)=3\cdot 4^x$.

Bestem fordoblingskonstanten for f.

Opgave 6

Løs følgende ligninger:

a) $\frac{1}{e^x}-4\cdot e^x+3=0$.

b) $\ln x+\ln(x+2)=3\cdot\ln 2$.

c) $\log(3-x)-\log x=-2$.

d) $\log^2 x-\log x=0$.

4. Differentialregning

Opgave 1

Angiv den afledede funktion af hver af funktionerne

$f_1(x)=x^2\cdot\sqrt{x}$, $\qquad f_2(x)=\frac{e^{3x}}{e^x+2}$,

$f_3(x)=5^x\cdot e^x$, $\qquad f_4(x)=x-\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

Opgave 2

En funktion f er givet ved: $f(x)=2\cdot\ln(x-2)+3$.

a) Bestem definitionsmængden for f .

b) Bestem $f'(x)$ og bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $(3, f(3))$.

Opgave 3

En funktion f er givet ved: $f(x)=\frac{4}{3}x^3-4x$.

a) Bestem monotoniforholdene for f .

b) Bestem koordinatsættene til de lokale ekstremumspunkter.

5. Trigonometri

Opgave 1

Løs følgende ligninger

a) $\cos(x) = 0,75, \quad x \in [0; 2\pi]$.

b) $2\cos(x) - 1 = 0,6$ for $x \in [0, 2\pi]$.

c) $\sin(2x+2) = 0,4$ for $-1 \leq x \leq \pi - 1$.

Opgave 2

En harmonisk svingning f er givet ved forskriften: $f(x) = 2\sin(x+2) - 4$.

a) Bestem maksimums- og minimumsværdien samt perioden for f.

b) Bestem $f'(x)$ og løs ligningen: $f'(x) = 0$, for $x \in [0; \pi]$.

c) Løs ved beregning ligningen: $2\sin^2(x) + 3\sin(x) - 2 = 0$.

6. Integralregning

Opgave 1

Angiv

$\int_1^5 f(x)\,dx$, når $\int_1^2 f(x)dx = \int_5^2 f(x)dx = 2$.

Opgave 2

Beregn følgende ubestemte integraler

a) $\int \frac{6x}{x^2+2}\,dx$

c) $\int 2x(x^2+1)^2\,dx$

b) $\int (\cos^2(x)+1) \cdot \sin(x)dx$.

d) $\int 6x^2 e^{x^3}\,dx$.

Opgave 3

Beregn følgende bestemte integraler

a) $\int_1^2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x}\,dx$

b) $\int_0^2 \frac{12x-4}{3x^2-2x+1}\,dx$

b) $\int_0^1 3 \cdot (x+2)^2\,dx$.

c) $\int_1^2 \frac{x^2+x}{x^2}\,dx$.

Opgave 4

To funktioner f og g er givet ved:

$$f(x) = 2\sqrt{x} \text{ og } g(x) = 8 - x \text{, for } x \geq 0$$

a) Tegn graferne for f og g i samme koordinatsystem, og gør rede for, at graferne skærer hinanden i punktet $P(4, 4)$.

Punktmængden M_1 er afgrænset af graferne for f og g og y-aksen.

b) Bestem ved hjælp af stamfunktion arealet af M_1.

Punktmængden M_1 drejes 360° om x-aksen. Derved fremkommer et omdrejningslegeme.

c) Bestem ved hjælp af stamfunktion volumenet af dette omdrejningslegeme.

Punktmængden M_2 er afgrænset af graferne for f og g og x-aksen.

d) Bestem ved hjælp af stamfunktion arealet af M_2.

7. Differentialligninger

Opgave 1

En differentialligning er givet ved: $\dfrac{dy}{dx} - y = 2e^{2x} - 1$.

a) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen.

b) Bestem den partikulære løsning $y = f(x)$ til differentialligningen, hvis graf i punktet $P\left(0, f(0)\right)$ har en tangent med ligningen: $y = 2x + 1$.

Opgave 2

En differentialligning er givet ved: $\dfrac{dy}{dx} - \cos(x) \cdot y = \cos(x)$

a) Bestem ved beregning en ligning for tangenten til grafen i punktet $P(\pi, 2)$ for den partikulære løsning, der går gennem punktet P.

b) Bestem ved beregning den fuldstændige løsning til differentialligningen.

En anden differentialligning er givet ved: $\dfrac{dy}{dx} = 2x + y$

c) Vis at $f(x) = e^x - 2 \cdot (x + 1)$ er en løsning til differentialligningen.

8. Vektorer i planen og plangeometri

Opgave 1

Givet er linjen l med ligningen $-x+y+1=0$ og punktet $P(1,3)$.

a) Beregn afstanden mellem linjen l og punktet P.

b) Bestem en ligning for den cirkel, som har centrum i P og tangerer linjen l.

c) Bestem en ligning for den linje m, som går gennem punktet P og er ortogonal på linjen l.

Opgave 2

I planen er givet vektorerne: $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$.

a) Bestem arealet af den trekant som de to vektorer udspænder.

b) Bestem projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

c) Bestem vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{a}+\vec{b}$.

En linje l er givet ved ligningen: $x+2y-6=0$.

d) Bestem afstanden fra punktet $P(8,4)$ til linjen l.

9. Vektorer i rummet og rumgeometri

Opgave 1

To vektorer er givet ved: $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$.

Vektoren $\vec{n}$ er givet ved: $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$, og et punkt er givet ved: $P(2,-1,1)$.

a) Vis, at $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-6\\-1\end{pmatrix}$.

b) Bestem en ligning for den plan, der indeholder P og har $\vec{n}$ som normalvektor.

Opgave 2

En linje er givet ved: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in R$,

og en plan er givet ved: $2x + y - z = 3$.

a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem linjen og planen.

b) Beregn afstanden mellem planen og punktet $P(-1,4,0)$.

c) Bestem den spidse vinkel mellem linjen og planen.

d) Bestem en ligning for den kugle, der har centrum i $P(-1,4,0)$ og har planen som tangentplan.

10. Vektorfunktioner

Opgave 1

I et koordinatsystem i planen er en kurve givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot e^t \\ t^2 + 2 \cdot t \end{pmatrix} \quad , \quad t \in [-3;2].$$

a) Beregn koordinaterne til hvert af kurvens skæringspunkter med koordinatsystemets akser.

b) Beregn hastighedsvektoren og vis, at kurven ikke har en tangent i punktet svarende til t-værdien -1.

c) Beregn ligningen for tangenten til kurven i punktet svarende til $t = 0$.

d) Bestem t-værdierne til kurvens skæringspunkter med linjen $y = 3$.

e) Kurven har en tangent, der er ortogonal på vektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ e \end{pmatrix}$.

Beregn t-værdien til røringspunktet med kurven.