

Opsamling

Hvis man ønsker mere udfordring, kan man springe den første opgave af hvert emne over.

1. Brøkregning, parentesregneregler, kvadratsætningerne, potensregneregler og reduktion

Opgave 1

Udregn nedenstående tal i hånden:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right), & \text{b) } \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) : \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{6}, \\ \text{c) } \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}}, & \text{d) } \sqrt{\frac{1}{10^4}}. \end{array}$$

Opgave 2

Reducér følgende udtryk mest muligt:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{b^2 - a^2}{a^2 - b^2} + \frac{2a}{a - b} & 2) \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} & 3) \frac{\left(\frac{a^3}{b^2} \right)^2 \cdot \frac{a}{b^2}}{a^5} \\ 4) 2(x - y)^2 - 2x(x - y) & 5) \frac{16^2 + 4y^2 + 64y}{2y + 16} & 6) \frac{a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{-2} \cdot \sqrt{a^3}}{\sqrt[4]{a^5} \cdot a^{-\frac{1}{2}}} \end{array}$$

2. Ligninger og uligheder

Opgave 1

a) En funktion f er givet ved: $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$.

Løs ligningen $f(x) = 2$.

b) Løs uligheden $x^2 + 3x - 6 < 3(x - 2)$

c) Løs følgende ligninger

1) $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$.

2) $2x^2 + 5x = 3x$

Opgave 2

Løs ved hjælp af lige store koefficienters metode ligningssystemerne

$$1) \begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 3 \\ 2x - 3y = -2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 3x + y = 10 \end{cases}$$

3. Funktioner: Den rette linje, definitionsmængde, værdimængde, sammensatte funktioner, inverse funktioner, andengradspolynomiet, eksponentielle udviklinger og logaritmer.

Opgave 1

En ret linje l går gennem punktet $P(2,3)$ og er vinkelret på linjen m givet

$$\text{ved: } m: y = -2x - 1$$

Beregn ligningen for linjen l .

Opgave 2

To funktioner f og g er givet ved: $f(x) = \ln(x+2)$ og $g(x) = x^2 - 3x$.

- Bestem værdimængden for funktionen g .
- Bestem definitionsmængden for den sammensatte funktion $f(g(x)) = (f \circ g)(x)$.

Opgave 3

En funktion f er givet ved: $f(x) = \sqrt{5x-3}$

- Bestem definitionsmængden for funktionen f .
- Bestem en forskrift for den inverse funktion f^{-1} til funktionen f .

Opgave 4

Et andengradspolynomium f er givet ved: $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$.

- Bestem koordinatsættene til de punkter, hvor grafen for f skærer koordinataksene.
- Bestem koordinatsættet til toppunktet for parabelen, givet ved grafen for f .
- Bestem værdimængden for funktionen f .

Opgave 5

Løs følgende ligninger:

a) $\frac{1}{e^x} - 4 \cdot e^x + 3 = 0$.

b) $\ln x + \ln(x + 2) = 3 \cdot \ln 2$.

c) $\log(3 - x) - \log x = -2$.

d) $\log^2 x - \log x = 0$.

4. Differentialregning

Opgave 1

Angiv den afledede funktion af hver af funktionerne

$$f_1(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}, \quad f_2(x) = \frac{e^{3x}}{e^x + 2}$$

$$f_3(x) = 5^x \cdot e^x, \quad f_4(x) = x - \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Opgave 2

En funktion f er givet ved: $f(x) = 2 \cdot \ln(x - 2) + 3$.

- Bestem definitionsmængden for f .
- Bestem $f'(x)$ og bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $(3, f(3))$.

Opgave 3

En funktion f er givet ved: $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x$.

- Bestem monotoniforholdene for f .
- Bestem koordinatsættene til de lokale ekstremumpunkter.

5. Trigonometri

Opgave 1

Løs følgende ligninger

- $\cos(x) = 0,75, \quad x \in [0; 2\pi]$.
- $2\cos(x) - 1 = 0,6$ for $x \in [0, 2\pi]$.
- $\sin(2x + 2) = 0,4$ for $-1 \leq x \leq \pi - 1$.

Opgave 2

En harmonisk svingning f er givet ved forskriften: $f(x) = 2\sin(x + 2) - 4$.

- Bestem maksimums- og minimumsværdien samt perioden for f .
- Bestem $f'(x)$ og løs ligningen: $f'(x) = 0$, for $x \in [0; \pi]$.
- Løs ved beregning ligningen: $2\sin^2(x) + 3\sin(x) - 2 = 0$.

6. Integralregning

Opgave 1

Angiv

$$\int_1^5 f(x) dx, \text{ når } \int_1^2 f(x) dx = \int_5^2 f(x) dx = 2.$$

Opgave 2

Beregn følgende ubestemte integraler

- $\int \frac{6x}{x^2 + 2} dx$
- $\int (\cos^2(x) + 1) \cdot \sin(x) dx$.
- $\int 2x(x^2 + 1)^2 dx$
- $\int 6x^2 e^{x^3} dx$.

Opgave 3

Beregn følgende bestemte integraler

- $\int_1^2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x} dx$
- $\int_0^2 \frac{12x - 4}{3x^2 - 2x + 1} dx$
- $\int_0^1 3 \cdot (x + 2)^2 dx$.
- $\int_1^2 \frac{x^2 + x}{x^2} dx$.

Opgave 4

To funktioner f og g er givet ved:

$$f(x) = 2\sqrt{x} \text{ og } g(x) = 8 - x, \text{ for } x \geq 0$$

- a) Tegn graferne for f og g i samme koordinatsystem, og gør rede for, at graferne skærer hinanden i punktet $P(4, 4)$.

Punktmængden M_1 er afgrænset af graferne for f og g og y -aksen.

- b) Bestem ved hjælp af stamfunktion arealet af M_1 .

Punktmængden M_1 drejes 360° om x -aksen. Derved fremkommer et omdrejningslegeme.

- c) Bestem ved hjælp af stamfunktion volumenet af dette omdrejningslegeme.

Punktmængden M_2 er afgrænset af graferne for f og g og x -aksen.

- d) Bestem ved hjælp af stamfunktion arealet af M_2 .

7. Differentialligninger

Opgave 1

En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} - y = 2e^{2x} - 1$.

- a) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen.
- b) Bestem den partikulære løsning $y = f(x)$ til differentialligningen, hvis graf i punktet $P(0, f(0))$ har en tangent med ligningen:
 $y = 2x + 1$.

Opgave 2

En differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} - \cos(x) \cdot y = \cos(x)$

- a) Bestem ved beregning en ligning for tangenten til grafen i punktet $P(\pi, 2)$ for den partikulære løsning, der går gennem punktet P .
- b) Bestem ved beregning den fuldstændige løsning til differentialligningen.

En anden differentialligning er givet ved: $\frac{dy}{dx} = 2x + y$

- c) Vis at $f(x) = e^x - 2 \cdot (x + 1)$ er en løsning til differentialligningen.

8. Vektorer i planen og plangeometri

Opgave 1

Givet er linjen l med ligningen $-x + y + 1 = 0$ og punktet $P(1, 3)$.

- Beregn afstanden mellem linjen l og punktet P .
- Bestem en ligning for den cirkel, som har centrum i P og tangerer linjen l .
- Bestem en ligning for den linje m , som går gennem punktet P og er ortogonal på linjen l .

Opgave 2

I planen er givet vektorerne: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Bestem arealet af den trekant som de to vektorer udspænder.
- Bestem projektionen af \vec{a} på \vec{b} .
- Bestem vinklen mellem \vec{a} og $\vec{a} + \vec{b}$.

En linje l er givet ved ligningen: $x + 2y - 6 = 0$.

- Bestem afstanden fra punktet $P(8, 4)$ til linjen l .

9. Vektorer i rummet og rumgeometri

Opgave 1

To vektorer er givet ved: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Vektoren \vec{n} er givet ved: $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$, og et punkt er givet ved: $P(2, -1, 1)$.

- Vis, at $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Bestem en ligning for den plan, der indeholder P og har \vec{n} som normalvektor.

Opgave 2

En linje er givet ved: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$

og en plan er givet ved: $2x + y - z = 3.$

- Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem linjen og planen.
- Beregn afstanden mellem planen og punktet $P(-1, 4, 0).$
- Bestem den spidse vinkel mellem linjen og planen.
- Bestem en ligning for den kugle, der har centrum i $P(-1, 4, 0)$ og har planen som tangentplan.

10. Vektorfunktioner

Opgave 1

I et koordinatsystem i planen er en kurve givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot e^t \\ t^2 + 2 \cdot t \end{pmatrix}, t \in [-3; 2].$$

- Beregn koordinaterne til hvert af kurvens skæringspunkter med koordinatsystemets akser.
- Beregn hastighedsvektoren og vis, at kurven ikke har en tangent i punktet svarende til t -værdien $-1.$
- Beregn ligningen for tangenten til kurven i punktet svarende til $t = 0.$
- Bestem t -værdierne til kurvens skæringspunkter med linjen $y = 3.$

Facit

1. Brøkregning, parentesregneregler, kvadratsætningerne, potensregneregler og reduktion

Opgave 1

- a) 49
 - b) $(1/2)$
 - c) 1
 - d) $(1/100)$
-

Opgave 2

- 1) $\frac{2 \cdot b}{a-b} + 1$
 - 2) $\frac{x-2}{x+2}$
 - 3) $\frac{a^2}{b^6}$
 - 4) $2(x - y)y$
 - 5) $2(y + 8)$
 - 6) $\frac{\sqrt{a^3}}{a^{\frac{5}{2}}}$
-

2. Ligninger og uligheder

Opgave 1

- a) $x=-8$
 - b) ingen løsning
 - c) 1) $x=0$ eller $x=3$ 2) $x=-1$ eller $x=0$
-

Opgave 2

- 1) $x=2, y=2$
 - 2) $x=3, y=1$
-

3. Funktioner: Den rette linje, definitionsmængde, værdimængde, sammensatte funktioner, inverse funktioner, andengradspolynomiet, eksponentialfunktioner, eksponentielle udviklinger og logaritmer.

Opgave 1

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)x + 2$$

Opgave 2

a) $Vm \in \left[-\frac{9}{4}, \infty[$

b) $Dm \in]-\infty, \left(-\frac{\sqrt{17}-3}{2}\right)[\cup \left(\frac{\sqrt{17}+3}{2}, \infty[$

Opgave 3

a) $Dm \in \left[\frac{3}{5}, \infty[$

b) $x = f^{-1} = \frac{y^2+3}{5}$

Opgave 4

a) $(-2,0), (1,0), (0,4)$

b) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$

c) $Vm \in \left[\frac{9}{2}, \infty[$

Opgave 5

a) $x=0$

b) $x=2$

c) $x=300/101$

d) $x=1$

4. Differentialregning

Opgave 1

$$f'_1 = \frac{5 * x^{\frac{3}{2}}}{2}$$

$$f'_2 = \frac{2 * (e^x + 3) * e^{3x}}{(e^x + 2)^2}$$

$$f'_3 = (\ln(5) + 1) * e^{(\ln(5)+1)*x}$$

$$f'_4 = 1 - \left(\frac{1}{x}\right)$$

Opgave 2

a) $Dm \in] 2, \infty[$

b) $f' = \frac{2}{x-2}$

c) $y = 2x - 3$

Opgave 3

a) f er voksende for $x \in] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
 f er aftagende for $x \in [-1, 1]$

b) $\left(-1, \left(\frac{8}{3}\right)\right)$

$\left(1, \left(-\frac{8}{3}\right)\right)$

5. Trigonometri

Opgave 1

- a) $x = 1,29$.
- b) $x \approx 0.69$.
- c) $x \approx -0.79$

Opgave 2

- a) Max = -2 , min = -6 og $T = 2\pi$.
- b) $L = \left\{ \frac{\pi - 4}{2}; \frac{3\pi - 4}{2} \right\}$
- c) $x = \frac{\pi}{4}$

6. Integralregning

Opgave 1

$$\int_1^5 f(x) dx = 0.$$

Opgave 2

- a) $\int \frac{6x}{x^2 + 2} dx = 3\ln(x^2 + 2) + c$
- b) $\int (\cos^2(x) + 1) \cdot \sin(x) dx = -\frac{t^3}{3} - t + c.$
- c) $\int 2x(x^2 + 1)^2 dx = \frac{x^6}{3} + x^4 + x^2 + c$
- d) $\int 6x^2 e^{x^3} dx = 2e^t + c.$

Opgave 3

a) $\int_1^2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{(\ln(2))^2}{2}$

b) $\int_0^2 \frac{12x-4}{3x^2-2x+1} dx = 2\ln(9)$

c) $\int_0^1 3 \cdot (x+2)^2 dx = 19.$

d) $\int_1^2 \frac{x^2+x}{x^2} dx = \ln(2).$

Opgave 4

a) Hint: Løs ligning $f(x) = g(x)$.

b) $A(M_1) = \frac{40}{3}.$

c) $V_x = \frac{928}{15}\pi.$

d) $A(M_1) = \frac{56}{3}.$

7. Differentialligninger

Opgave 1

a) $y = 2e^{2x} + 1 + c \cdot e^x.$

b) $f(x) = 2e^{2x} + 1 + 2 \cdot e^x.$

Opgave 2

a) $y = -3x + 3\pi + 2.$

b) $y = -1 + c \cdot e^{-\sin(x)}$

c) Hint: Find $f'(x)$.

8. Vektorer i planen og plangeometri

Opgave 1

a) $\text{dist}(P, l) = \frac{3\sqrt{2}}{3}.$

b) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = \frac{9}{2}$

Opgave 2

a) $\frac{13}{2}$

b) $\vec{a}_b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $v \approx 1,42$

d) $\text{dist}(P, l) = 2\sqrt{5}$

9. Vektorer i rummet og rumgeometri

Opgave 1

b) $\alpha: 2x - 6y - z - 3 = 0.$

Opgave 2

a) $(x, y, z) = (3, 7, 10)$

b) $\text{dist}(P, \alpha) = \frac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\theta^\circ \approx 1,01$

d) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 + z^2 = \frac{1}{6}$

10. Vektorfunktioner

Opgave 1

a) x - akse: $L = \{-2, 0\}$, y - akse: $t = 0.$

b) Hint: Undersøg tangentens hældning.

c) $y = 2x$

d) $L = \{-3, 1\}$