Differentialregning 2

Hvis man ønsker mere udfordring, kan man springe de første 7 opgaver over.

Opgave 1

Udregn monotoniintervallerne for funktionerne

$f_1(x) = 2x^2 + 2x - 4, \qquad f_2(x) = x^4 - 2x^3$

$f_3(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2, \qquad f_4(x) = x \cdot (x^2 - 3).$

Opgave 2

Tegn monotonilinjen for $f(x) = 2e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$. Angiv desuden funktionens mindsteværdi.

Opgave 3

Udregn monotoniintervallerne for funktionerne

$$f_5(x) = \sqrt{8 - x}, \qquad f_6(x) = \frac{1}{2}x - \frac{x}{x^2 - 4},$$

$$f_3(t) = \frac{t}{t^2 + 2}, \qquad f_4(t) = \frac{t^2 + t - 2}{t - 1}$$

$$f_5(z) = \frac{2}{z^2 + 1}, \qquad f_6(s) = \frac{s - 1}{s^2}$$

Opgave 4

Funktionen f er givet ved $f(x) = -2x + \frac{x}{x^2 - 4}.$, $x \neq \pm 2$.

Undersøg om $f'(x) = -2 + \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2}$.

Vis vha. udtrykket ovenfor, at $f'(x) < 0$ for alle x i $\mathrm{Dm}(f)$, og benyt dette til at angive de(t) interval(ler), hvor f er aftagende.

Er f aftagende?

Opgave 5

Angiv definitionsmængden for $f(x) = \dfrac{x^2 + ax}{x + b}$. Undersøg derefter, om der findes konstanter a og b, så f har lokalt maksimum i $(-4, -8)$.

Opgave 6

a) En funktion f er givet ved $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 8x + 1$.

Bestem de intervaller hvori f er voksende.

b) En funktion *f* er givet ved: $f(x) = \dfrac{-2}{1+e^x}$.

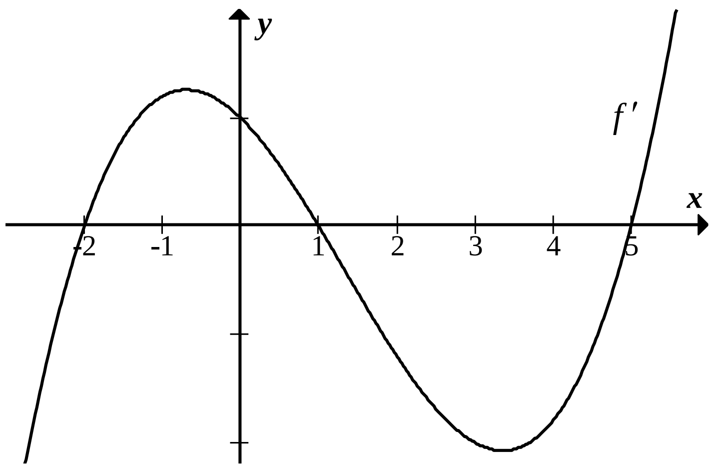
Beregn $f'(x)$ og vis, at *f* er voksende.

c) En funktion *f* er givet ved: $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $x > 0$.

Beregn $f'(x)$ og vis, at *f* er voksende.

Opgave 7

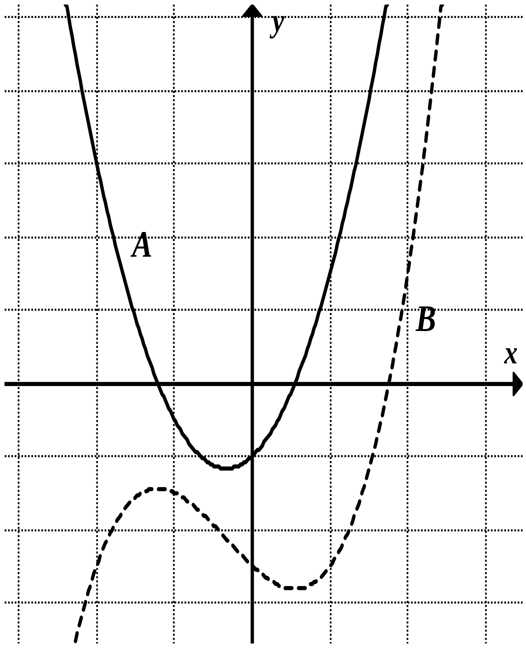
På figuren er vist grafen for den afledede funktion $f'(x)$ af en funktion $f(x)$.



a) Bestem ved hjælp af grafen *x*-værdierne til hvert af de lokale ekstremumspunkter for funktionen f.

Opgave 8

På nedenstående figur er vist de grafiske billeder for en funktion *f*, og dens afledede, f'.



a) Angiv med begrundelse, hvilken graf der afbilder grafen for *f* og hvilken der afbilder grafen for f'.

Opgave 9

En funktion *f* er givet ved: $f(x) = 4 \cdot x \cdot e^{\frac{1}{2}x}$

a) Beregn funktionens mindste værdi.

b) Løs ligningen $f(x) = x$.

Opgave 10

Funktionen *f* er givet ved: $f(x) = \dfrac{e^{x+1}}{4x-2}$.

a) Bestem definitionsmængden for funktionen *f*.

b) Bestem ved hjælp af f' monotoniforholdene for funktionen *f*.

c) Bestem koordinatsættet til det punkt på funktionens graf, hvor der er lokalt minimum.

Opgave 11

En funktion *f* er givet ved: $f(x)=(x-1)^2\cdot e^{x+2}$.

a) Bestem ved hjælp af f' monotoniforholdene for funktionen.

b) Bestem koordinatsættene til de lokale ekstremumspunkter.

c) Bestem en ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet $P(0,\ f(0))$.

Opgave 12

En funktion *f* er givet ved: $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+9.$

Grafen for *f* har to lokale ekstremumspunkter.

a) Bestem koordinatsættene til disse ekstremumspunkter.

Grafen for *f* har to tangenter, der er vinkelrette på linjen med ligningen: $x+5y+2=0.$

b) Bestem koordinatsættene til disse tangenters røringspunkter.

Opgave 13

En funktion *f* er givet ved: $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}.$

a) Bestem definitionsmængden for *f*.

b) Bestem monotoniintervallerne for funktionen *f*.

c) Bestem koordinatsættene til eventuelle ekstremumspunkter.

d) Bestem en ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet $P(0,\ f(0))$.

Opgave 14

En funktion *f* er givet ved: $f(x)=x+1+\dfrac{4}{x-4}$

a) Bestem $f'(x)$ og løs ligningen $f'(x)=0$.

b) Bestem funktionens monotoniintervaller.

c) Bestem koordinaterne til de punkter på funktionens graf, hvor grafen har lokale ekstremumspunkter.

d) Bestem koordinaterne til skæringspunkterne mellem grafen for *f* og linjen givet ved ligningen $y=3x-5$.

Opgave 15

En funktion *f* er givet ved: $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{4x + 2}$.

a) Bestem definitionsmængden for *f* samt nulpunkterne for f.

b) Bestem ved hjælp af f' monotoniforholdene for funktionen *f*.

c) Bestem koordinatsættene til de lokale ekstremumspunkter.

En linje l er givet ved: $y = -2x + k$, hvor k er en konstant.

d) For hvilke værdier af k, bliver linjen l tangent til grafen for *f*?

Facit

Opgave 1

f_1 er aftagende i $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ og voksende i $\left[-\frac{1}{2}; \infty\right[$,

f_2 er aftagende i $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$ og voksende i $\left[\frac{3}{2}; \infty\right[$

f_3 er aftagende i $[1; 3]$ og voksende i $]-\infty; 1] \cup [3; \infty[$

f_4 er aftagende i $[-1; 1]$ og voksende i $]-\infty; -1] \cup [1; \infty[$

_ _

Opgave 2

$f(x)$ er aftagende i$]-\infty; -\ln 2]$ og voksende i $[-\ln 2\,; \infty[$,

funktionens mindsteværdi er 2.

Opgave 3

f_1 er aftagende i $]-\infty; 8[$

f_2 er voksende for alle $x \in \mathbb{R}$

f_3 er aftagende i $]-\infty; -\sqrt{2}\,[\, \cup\,]\sqrt{2}\,; \infty[$og voksende i $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}\,[$

f_4 er voksende for alle $x \in \mathbb{R}$

f_5 er aftagende i$]-\infty; 0]$ og voksende i $[0; \infty[$

f_6 er aftagende i $]-\infty; -2] \cup]0; \infty[$og voksende i $[-2; 0[$

Opgave 4

Ja, f er aftagende i $]-\infty; -2\,[\, \cup\,]-2; 2\,[\, \cup\,]2\,; \infty[$,

---

Opgave 5

Ja, $a = 4$ og $b = 4$

Opgave 6

a) f er voksende i $]-\infty; -4] \cup [4; \infty[$

b) $f'(x) = \dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}$

c) $f\,'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

Opgave 7

a) Lokalt minimum i $x = -2$ og $x = 5$ Lokalt maksimum i $x = 1$

Opgave 8

a) $A \Longrightarrow f'$ og $B \Longrightarrow f$

Opgave 9

a) $x = -\frac{8}{e}$ b) $L = \{-4\ln 2\,;0\}$

Opgave 10

a) $\mathrm{Dm}(f) = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$

b) f er aftagende i $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ og voksende i $\left[\frac{3}{2};\infty\right[$

Opgave 11

a) f er voksende i $]-\infty;-1] \cup [1;\infty[$ og aftagende i $[-1;1]$
b) Lokalt maksimum : $(x,y) = (-1,4e)$ og lokalt minimum : $(x,y) = (1,0)$
c) $y = -e^2 \cdot x + e^2$

Opgave 12

a) Lokalt maksimum : $(x,y) = \left(-1,\frac{32}{3}\right)$ og lokalt minimum : $(x,y) = (3,0)$
b) $(x,y) = \left(-2,\frac{25}{3}\right)$ og $(x,y) = \left(4,\frac{7}{3}\right)$

Opgave 13

a) $\mathrm{Dm}(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$
b) f er aftagende i $]-\infty;1[\cup]1;2]$ og voksende i $[2;\infty[$
c) Lokalt maksimum : $(x,y) = (2,e^2)$
d) $y = -2x - 1$

Opgave 14

a) $L = \{2; 6\}$
b)f er voksende i $]-\infty; 2] \cup [6; \infty[$ og aftagende i $[2; 4[\cup]4; 6]$
c) Lokalt maksimum : $(x, y) = (2,1)$ og lokalt minimum : $(x, y) = (6,9)$
d) $(x, y) = (2,1)$ og lokalt minimum : $(x, y) = (5,10)$

––––––––––––––––––––––––––––––––

Opgave 15

a) $\mathrm{Dm}(f) = \mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $L = \{0; 4\}$
b)f er voksende i $]-\infty; -2] \cup [1; \infty[$ og aftagende i $\left]-2; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; 1\right[$
c) Lokalt maksimum : $(x, y) = (-2, -2)$ og lokalt minimum : $(x, y) = \left(1, \frac{5}{6}\right)$
d) $k = 0\ og\ k = \frac{3}{2}$

––––––––––––––––––––––––––––––––