

Rumgeometri

Hvis man ønsker mere udfordring, kan man springe de første 10 opgaver over.

Opgave 1

I rummet er givet punkterne A og B . Bestem en parameterfremstilling for linjen l som indeholder punkterne A og B , når

- 1) $A(1, -2, 2)$ og $B(-1, 1, 1)$.
- 2) $A(0, -1, 3)$ og $B(2, 1, 5)$.
- 3) $A(2, 5, -1)$ og $B(1, -3, 6)$.

Opgave 2

Bestem en parameterfremstilling for hver af linjerne l og m , når l går gennem punkterne $A(2, -4, 7)$ og $B(-3, 6, 2)$, mens m går gennem punktet $C(2, 3, 4)$ og er parallel med $\vec{a} = (-1, 4, 7)$.

Vis, at l og m ikke er parallelle.

Opgave 3

Undersøg, om linjerne m_1 og m_2 skærer hinanden, er parallelle eller er vindskæve.

Hvis de skærer hinanden, skal skæringspunktets koordinater bestemmes.

$$1) m_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 8\frac{1}{2} \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, m_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 13 \\ -5\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$2) m_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, m_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Opgave 4

Linjerne m_1 og m_2 har parameterfremstillingerne

$$m_1: (x, y, z) = (t + 3, t + 1, 2t - 4)$$

$$m_2: (x, y, z) = (t - 2, 3t + 4, -2t + 1).$$

Undersøg, om linjerne skærer hinanden, er parallelle eller er vindskæve.

Opgave 5

En plan α indeholder punktet $P(2, 1, 5)$ og linjen l står vinkelret på planen

$$\alpha. \text{ Linjen } l \text{ er givet ved } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Bestem en ligning for planen α .

Opgave 6

Bestem en ligning for den plan, der har vektor \vec{n} som normalvektor og indeholder punktet P_0 , når

$$1) \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ og } P_0(1, 2, 1)$$

$$2) \vec{n} = (1, -3, 2) \text{ og } P_0(3, 1, 7)$$

$$3) \vec{n} = (1, 0, -1) \text{ og } P_0(2, -1, -1)$$

$$4) \vec{n} = (0, 0, 4) \text{ og } P_0(3, 0, 0).$$

Gør rede for, hvordan planerne i 3) og 4) ligger i koordinatsystemet.

Opgave 7

Angiv en ligning for planen der indeholder punkterne P , Q og R , når

$$1) P(1, 0, 1), Q(2, -1, 2), R(1, 1, 1)$$

$$2) P(2, 3, 1), Q(5, -4, 0), R(3, 2, 1).$$

Opgave 8

En vektor er givet ved: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En ret linje er givet ved: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 2k \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$

a) Beregn konstanten k således, at linjen er vinkelret på vektor \vec{a} .

Opgave 9

Bestem afstanden fra punktet A til planen α , når

- 1) $\alpha: 4x + 3y - z + 4 = 0$ og $A(2, -1, 5)$
- 2) $\alpha: 13x - y - 10z = 22$ og $A(3, -2, 6)$
- 3) $\alpha: 3x + y - 4z = 1$ og $A(3, -2, 6)$

Opgave 10

- a) En plan er givet ved: $2x - y + 6z = 3$.

Bestem koordinatsættet til planens skæringspunkt med z -aksen.

- b) En linje er givet ved: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in R$.

Beregn koordinatsættet til linjens skæringspunkt med xy -planen.

Opgave 11

I rummet er givet en plan α og en linje l . Bestem skæringspunktet mellem planen α og linjen l , når

1) $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R$ og $\alpha: x + 2y - z + 3 = 0$

2) $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R$ og $\alpha: 2x - y + z - 4 = 0$.

Opgave 12

En vektor er givet ved: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ og et punkt er givet ved: $P_1(1, -2, 1)$

En linje l er givet ved: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R$

- a) Bestem en ligning for den plan α , der har vektoren \vec{n} som normalvektor og som indeholder punktet $P_1(1, -2, 1)$.
- b) Beregn den spidse vinkel mellem linjen l og planen α .

Opgave 13

Bestem koordinatsættet til centrum C og radius r for de kugler, hvis ligninger er:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4 = 0$.

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y - 11 = 0$.

Opgave 14

a) En kugle er givet ved ligningen: $(x-4)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 10$.

Bestem koordinatsættene til skæringspunkterne med x -aksen.

b) En kugle har centrum i $(2,3,4)$ og radius 6.

Opstil en ligning for kuglen og angiv koordinaterne til kuglens skæringspunkter med akserne.

Opgave 15

En kugle er givet ved ligningen: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 18$

Et punkt er givet ved: $P(2,0,1)$

a) Vis at punktet P er et punkt på kuglen.

b) Bestem en ligning for kuglens tangentplan i punktet P .

Opgave 16

En kugle er givet ved ligningen: $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 36$,

og en plan er givet ved ligningen: $2x - y - 2z - 13 = 0$.

Et punkt er givet ved: $A(1, k, -2)$, hvor k er en konstant.

a) Bestem konstanten k , således at A bliver et punkt på kuglen.

b) Undersøg om planen er tangentplan til kuglen.

Opgave 17

Der er givet to punkter $P_0(2, -1, 3)$ og $Q(1, 3, 4)$ samt en vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

En ret linje l indeholder punktet P_0 og har vektoren \vec{r} som retningsvektor.

- Beregn afstanden mellem linjen l og punktet Q .
- Beregn koordinaterne til skæringspunktet mellem linjen l og xy -planen.

Opgave 18

En linje er givet ved: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$

- Bestem koordinatsættet til linjens skæringspunkt med xy -planen.
- Beregn afstanden mellem punktet $P(1, 2, 4)$ og linjen.
- Bestem en parameterfremstilling for linjens projektion på xy -planen.

Opgave 19

I rummet er følgende givet: En plan $\alpha : 8x + 5y - 3z = 10$, samt punkterne: $A(0, 3, 4)$, $B(-1, 5, 3)$ og $C(k, 4, 5)$.

- Bestem en parameterfremstilling for den linje l , der er vinkelret på planen α og som indeholder punktet A .
- Bestem afstanden mellem punktet B og linjen l .
- Bestem værdierne af tallet k således, at den trekant som punkterne A , B og C udspænder, får arealet $T = \frac{1}{2}\sqrt{50}$.

Opgave 20

I rummet er følgende givet: Et punkt $A(4, 0, 3)$, en plan α med ligningen $3x + 2y - 4z + 12 = 0$, samt en linje l med

$$\text{parameterfremstillingen } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in R.$$

- Bestem afstanden fra punktet A til planen α .
- Bestem afstanden fra punktet A til linjen l .
- Bestem den spidse vinkel mellem linjen l og planen α .
- Bestem projektionen af retningsvektoren for linjen l på planen α .

Opgave 21

I et koordinatsystem i rummet er planerne α og β givet ved ligningerne

$$\alpha: 3x - 2y - 5 = 0, \quad \beta: -x + 2y - 2z = -1.$$

Desuden er der givet en kugle K med centrum $C(-2, 1, 1)$ og radius $r = 4$ samt en linje l

$$\text{med parameterfremstilling } l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in R.$$

- Bestem en ligning for kuglen K .
- Afgør med begrundelse om β er tangentplan til kuglen K .
- Bestem en ligning for den plan, som indeholder linjen l og punktet $P(1, 3, 4)$.

Facit

Opgave 1

$$1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ eller } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 8\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ eller } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 8\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

$$3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ eller } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Opgave 2

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},$$

for at vis at l og m er ikke parallelle, man skal find krydsprodukt mellem l og m, hvis krydsprodukt $\neq 0$ så l og m er ikke parallelle.

Opgave 3

$$1) \text{ Linjerne skærer hinanden i } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 8\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2) Linjerne er vindskæve.

Opgave 4

a) Vindskæve

Opgave 5

a) $\alpha: 4x - 3y + z - 10 = 0$

Opgave 6

1) $\alpha: 2x - y + 3z - 3 = 0$

2) $\alpha: x - 3y + 2z - 14 = 0$

3) $\alpha: x - z - 3 = 0$

4) $\alpha: z = 0$

Opgave 7

1) $\alpha: -x + z = 0$ 2) $\alpha: -x - y + 4z + 1 = 0$

Opgave 8

a) $k = -1$

Opgave 9

1) $\text{dist}(A, \alpha) = \frac{2\sqrt{26}}{13}$ 2) $\text{dist}(A, \alpha) = \frac{47}{3\sqrt{30}}$

3) $\text{dist}(A, \alpha) = \frac{9\sqrt{26}}{13}$

Opgave 10

a) $P\left(0, 0, \left(\frac{1}{2}\right)\right)$ b) $P(-6, -13, 0)$

Opgave 11

1) $P(1, -1, 2)$ 2) $P(3, 4, 2)$

Opgave 12

a) $\alpha: 2x - 4y - z - 9 = 0$ b) $1,40^\circ$

Opgave 13

a) $C(1, -2, 0)$ og $r = 3$ b) $C(3, -4, 0)$ og $r = 6$

Opgave 14

a) $(3, 0, 0)$ og $(5, 0, 0)$ b) x - akse: $(2 + \sqrt{11}, 0, 0)$ og $(2 - \sqrt{11}, 0, 0)$
 y - akse: $(0, 7, 0)$ og $(0, -1, 0)$ z - akse: $(0, 0, 4 + \sqrt{23})$ og $(0, 0, 4 - \sqrt{23})$

Opgave 15

b) $\alpha: x - y + 4z - 6 = 0$

Opgave 16

a) $L = \{-3, 9\}$ b) Hint: Afstand mellem et punkt og en plan.

Opgave 17

a) $\text{dist}(Q, l) \approx 4,41$ b) $P(-1, -2, 0)$

Opgave 18

a) $P(5, 8, 0)$ b) $\text{dist}(P, l) \approx \frac{9\sqrt{2}}{11}$ c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Opgave 19

a) $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\text{dist}(P, l) \approx 2,397$

c) $L = \left\{ -3, \frac{13}{5} \right\}$

Opgave 20

a) $\text{dist}(A, \alpha) \approx \frac{12\sqrt{29}}{29}$ b) $\text{dist}(A, l) \approx \frac{2\sqrt{28}}{3}$

c) $\theta \approx 1^\circ$ d) $\frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} \sqrt{29} + 3 \\ 2\sqrt{29} + 2 \\ 2\sqrt{29} - 4 \end{pmatrix}$

Opgave 21

a) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 16$

b) β er ikke en tangentplan til kuglen K . Hint: Afstand mellem et punkt og en plan.

c) $4x - 7y + 2z + 11 = 0$
