

Vektorfunktioner

Hvis man ønsker mere udfordring, kan man springe de første 6 opgaver over.

Opgave 1

I et koordinatsystem er linjen m givet ved parameterfremstillingen

$$x = -3 + 2t$$

$$y = 2 - t$$

- 1) Angiv en retningsvektor for m .
- 2) Angiv koordinaterne til to punkter på m .
- 3) Afgør, om punktet $P_t(-33, -9)$ ligger på m .
- 4) Afgør, om følgende også er en parameterfremstilling for m :

$$x = -11 - 4t$$

$$y = 6 + 2t$$

Opgave 2

Et punkt P_t bevæger sig efter parameterfremstillingen

$$x = 4 - 4t$$

$$y = -1 + 3t$$

Angiv koordinaterne for P_{-2} .

Bestem hastighedsvektor og fart; tegn banekurven.

Opgave 3

Bestem de t -værdier for hvilke grafen for $f(t)$ skærer en af koordinataksene, når

$$f_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 6t \\ 2t \end{pmatrix}, f_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

$$f_3(t) = \begin{pmatrix} t - t^2 \\ t^2 - 3t \end{pmatrix}, f_4(t) = \begin{pmatrix} 9 - t^2 \\ t^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Opgave 4

Bestem de t -værdier for hvilke grafen ligger i 2. anden kvadrant når vektorfunktionen er givet ved hhv.

$$f(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 3t \\ 2 - t \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad h(t) = \begin{pmatrix} 2 - t \\ t^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Opgave 5

Angiv hvis det er muligt, en ligning for tangenten i punktet, der svarer til t_0 , når

$$1) f(t) = \begin{pmatrix} 2t - 1 \\ 4t^2 \end{pmatrix}, t_0 = 2$$

$$2) g(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 3t^2 \\ \cos t \end{pmatrix}, t_0 = 0$$

$$3) h(t) = \begin{pmatrix} (\ln t)^2 \\ \ln(t^2) \end{pmatrix}, t_0 = e$$

$$4) k(t) = \begin{pmatrix} 2t^3 + 2 \\ 4t^3 + 4t \end{pmatrix}, t_0 = -1$$

Opgave 6

Tegn kurven, der er givet ved vektorfunktionen

$$f(t) = \begin{pmatrix} 2 \sin t - 3 \\ 2 \cos t + 2 \end{pmatrix}, 0 \leq t_0 < 2\pi.$$

Afsæt derefter på samme figur hastigheds- og accelerationsvektoren til tidspunkterne

$$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \text{og} \quad \pi.$$

Angiv farten til tidspunktet t_0

Opgave 7

Et punkt bevæger sig i et koordinatsystem efter parameterfremstillingen

$$x = t^3 - t$$

$$y = 2t^4 - t^2$$

Bestem accelerationsvektoren til de tidspunkter, hvor punktets bevægelsesretning er parallel med en af koordinataksene.

Opgave 8

I et koordinatsystem er en kurve givet ved parameterfremstillingen:

$$x = t^2 - 4$$

$$y = t^3 - 3t$$

- 1) Bestem koordinaterne til banekurvens skæringspunkter med koordinataksene.
- 2) Angiv ligninger for de tangenter, der er parallelle med koordinataksene.
- 3) Angiv hastighed, fart og acceleration til $t = \pm\sqrt{3}$.

Opgave 9

Banekurven for $(x = -4 + 5 \cos(2t), y = 2 + 5 \sin(2t))$, er en cirkel.

Angiv centrum, radius, hastigheds- og accelerationsvektor, fart og vinkelhastighed.

Opgave 10

I et koordinatsystem i planen er en kurve givet ved parameterfremstillingen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) - 1 \\ t \cdot \cos(t) \end{pmatrix}, t \in] - \pi; \pi[$$

- a) Tegn banekurven for vektorfunktionen
- b) Beregn koordinaterne til hvert af kurvens skæringspunkter med koordinataksene
- c) Angiv en parameterfremstilling for partiklens hastighedsvektor
- d) Angiv en parameterfremstilling for partiklens accelerationsvektor
- e) Beregn hastighedsvektoren til tiden $t = \frac{\pi}{2}$

- f) Beregn farten til tiden $t = 0$
- g) Beregn accelerationsvektoren til tiden $t = 0$

Facit

Opgave 1

1) $-\vec{r}_m = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2) $P(-1,1)$

3) Nej, P_t ligger ikke på m.

4) Ja

Opgave 2

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, |f'(t)| = 5$$

Opgave 3

$$f_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 6t \\ 2t \end{pmatrix}, L = \{0; 6\}$$

$$f_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, t = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$f_3(t) = \begin{pmatrix} t - t^2 \\ t^2 - 3t \end{pmatrix}, L = \{0; 1; 3\}$$

$$f_4(t) = \begin{pmatrix} 9 - t^2 \\ t^2 - 4 \end{pmatrix}, x\text{-aksen: } L = \{-2; 2\}, y\text{-aksen: } L = \{-3; 3\}$$

Opgave 4

$$f(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 3t \\ 2 - t \end{pmatrix}, t \in [0; 2]$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^2 \end{pmatrix}, t = 0$$

$$h(t) = \begin{pmatrix} 2 - t \\ t^2 - 4 \end{pmatrix}, t \in [2; \infty[$$

Opgave 5

1) $y = 8x - 8$

2) Ikke muligt

3) $y = x + 1$

4) $y = \frac{8}{3}x - 8$

Opgave 6

$$|f'(t)| = 2$$

Opgave 7

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix}$$

Opgave 8

1), y - aksens: $L = \{-2; 2\}$, x - aksens: $L = \{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$

2), x - aksens: $y = -2$, y - aksens: $x = -4$

3) $f'(-\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix}$, $f'(\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix}$, $|f'(-\sqrt{3})| = |f'(\sqrt{3})| = 4\sqrt{3}$,

$$f''(-\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -6\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad f''(\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Opgave 9

$$C(-4, 2), \quad r = 2, \quad f'(t) = \begin{pmatrix} -10 \sin(2t) \\ 10 \cos(2t) \end{pmatrix},$$

$$f''(t) = \begin{pmatrix} -20 \cos(2t) \\ 20 \sin(2t) \end{pmatrix}, \quad |f'(t)| = 10.$$

Opgave 10

$$\text{b) } L = \left\{ -\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2} \right\} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) - t \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -2 \sin(t) - t \cdot \cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{e) } f' \left(\frac{\pi}{2} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } |f'(0)| = 1, \quad f''(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
